SÉRIE A, N° 4680
N° D'ORDRE : 5527

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES APPLIQUÉES

par

Ernest LARISCH

1re THÈSE : Contribution à la théorie des écoulements avec réactions chimiques

2e THÈSE : Stabilité gravitationnelle d'une masse fluide en rotation différentielle

Soutenues le 21 janvier 1966 devant la Commission d'examen.

MM. SCHATZMANN Président.

CABANNES
GUIRAUD
} Examinateurs.

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc
92 - CHATILLON

SÉRIE A, Nº 4680
Nº D'ORDRE : 5527

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES APPLIQUÉES

par

Ernest LARISCH

1re THÈSE : Contribution à la théorie des écoulements avec réactions chimiques

2e THÈSE : Stabilité gravitationnelle d'une masse fluide en rotation différentielle

Soutenues le 21 janvier 1966 devant la Commission d'examen.

MM. SCHATZMANN Président.

CABANNES, GUIRAUD } Examinateurs.

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc
92 - CHATILLON

UNIV.
LEIDEN
BIB.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen . . . . . M. ZAMANSKY

PRENANT	T Anatomie et histologie comparées.	FORTET	T Calcul des probabilités et physique mathématiques.
GRASSE	T Evolution des êtres organisés.	SCHWARTZ	T Calcul différentiel et intégral.
PREVOST	T Chimie organique.	CHOUARD	T Physiologie végétale.
WYART	T Minéralogie et cristallographie.	MALAVARD	T Aviation (technique aéronautique)
TEISSIER	T Zoologie.	BRELOT	T Analyse supérieure.
AUGER	T Physique quantique et relativité.	NORMANT	T Synthèse organique.
MONNIER	T Physiologie générale.	BENARD	T Chimie appliquée.
PIVETEAU	T Paléontologie.	DUGUE	T Statistique mathématique.
ROCARD	T Physique E.N.S.	SOULAIRAC	T Psychophysiologie.
CARTAN	T Mathématiques E.N.S.	ULRICH	T Physiologie végétale appliquée.
LAFFITTE	T Chimie générale.	KIRRMANN	T Théories chimiques.
N...	T Géométrie supérieure.	CHADEFAUD	T Botanique.
COULOMB	T Physique du globe.	Melle LE BRETON	T Physiologie de la nutrition.
Melle COUSIN	T Biologie animale S.P.C.N.	LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie.
CHRETIEN	T Chimie minérale.		
BOCQUET	T Zoologie.	DEVILLERS	T Anatomie et histologie comparées.
KASTLER	T Physique E.N.S.		
EPHRUSSI	T Génétique.	EHRESMANN	T Topologie algébrique.
GAUTHERET	T Biologie végétale C.P.E.M.	FRANÇON	T Physique S.P.C.N.
LUCAS R.	T Recherches physiques.	GLANGEAUD	T Géographie physique, géologie dynamique.
THOMAS A.	T Biologie cellulaire.		
MORAND	T Physique enseignement.	DODEMENT	T Mathématiques M.G.P.
SOLEILLET	T Physique C.P.E.M.	PISOT	T Technique mathématique de la physique.
FORTIER	T Mécanique expérimentale des fluides.		
		ROCH	T Géologie.
DRACH	T Zoologie.	SCHATZMANN	T Astrophysique.
QUENEY	T Météorologie et dynamique de l'atmosphère.	TERMIER	T Géologie générale.
		ZAMANSKY	T Mathématiques générales.
GALLIEN	T Embryologie.	LENNUIER	T Physique M.G.P.
EICHHORN	T Botanique.	ROUTHIER	T Géologie appliquée.
DE CUGNAC	T Biologie végétale S.P.C.N.	Mme TONNELAT	T Physique théorique.
Melle CAUCHOIS	T Chimie physique.	DIXMIER	T Mathématiques M.P.C.
THELLIER	T Physique du globe.	SOUCHAY	T Chimie générale.
PONCIN	T Mécanique générale.	AIGRAIN	T Electrotechnique.
DUBREIL	T Arithmétique et théorie des nombres.	BRUSSET	T Chimie systématique.
		LEVY	T Physique théorique des hautes énergies.
QUELET	T Chimie organique.		
CAGNIARD	T Géophysique appliquée.	Mme CHAIX	T Chimie biologique.
CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire.	Mme HUREL PY	T Biologie végétale C.P.E.M.
CUVILLIER	T Micropaléontologie.	PANNETIER	T Chimie générale I
JUNG	T Géologie.	BRUN	T Mécanique des fluides I
TRILLAT	T Microscopie et diffraction électronique.	Mme DUBREIL	T Mathématiques (Agrégation)
		Mme LELONG	T Mathématiques II E.N.S.
WIEMANN	T Chimie organique et structurale.	BELLAIR	T Géologie S.P.C.N.
VASSY	T Physique de l'atmosphère.	COTTE	T Physique électricité.
DESTOUCHES	T Théorie physique.	DUBOIS J.E.	T Chimie organique physique.
AMIEL	T Chimie générale.	LAMOTTE	T Zoologie E.N.S.
HOCART	T Minéralogie et cristallographie.	OLMER	T Energétique générale.
J.P. MATHIEU	T Physique optique.	GAUTHIER	T Mécanique appliquée.
COUTEAUX	T Cytologie.	BARCHEWITZ	T Chimie physique.
CHOQUET	T Théorie des fonctions et topologie.	BROSSEL	T Physique atomique.
FELDMANN	T Biologie végétale marine.	BUSER	T Physiologie comparée.
JOST	T Physiologie comparée.	CAMUS	T Physiologie végétale.

....

BUVAT	T	Botanique ENS
CURIEN	T	Minéralogie et cristallographie.
POSSOMPES	T	Zoologie.
PULLMANN	T	Chimie quantique.
TEILLAC	T	Physique nucléaire et radio-activité.
VILLE	T	Econométrie.
WILLEMART	T	Chimie C.P.E.M.
FREYMANN	T	Recherches physiques.
ROLLET	T	Chimie minérale.
Melle JOSIEN	T	Chimie S.P.C.N.
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.
LUCAS G.	T	Géologie.
ALLARD	T	Chimie physique.
BERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales.
BRICARD	T	Météorologie.
Mme ALBE-FESSARD	T	Psycho-physiologie.
M. JULIA	T	Etude des molécules naturelles complexes.
MAGAT	T	Physico-chimie des rayonnements.
Melle QUINTIN	T	Electrochimie.
MONOD	T	Chimie du métabolisme.
DE POSSEL	T	Analyse numérique.
CHARLOT	T	Chimie analytique.
CHATELET	T	Chimie C.P.E.M.
MATTLER	T	Physique S.P.C.N.
BOUISSIERES	T	Radiochimie.
Mme COUTURE	T	Thermodynamique et mécanique physique.
FRANC	T	Biologie animale C.P.E.M.
SCHNELL	T	Botanique tropicale.
STOLKOWSKI	T	Physiologie générale.
ACHER	T	Chimie biologique.
BAUDOIN	T	Biologie animale C.P.E.M.
BEAUMONT		Biologie animale S.P.C.N.
BLAMONT		Géophysique ionosphère.
BOUREAU	T	Botanique.
CURIE D.		Physique M.G.P.
DURAND DELGA	T	Géologie.
HELLER	T	Physiologie végétale.
TORTRAT	T	Calcul des probabilités.
CAILLEUX	T	Géologie S.P.C.N.
MAGNAN		Physique électricité.
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire.
Melle FOURCROY		Biologie végétale S.P.C.N.
Mme CHOQUET BRUHAT		Mécanique analytique et mécanique céleste.
Melle VEIL	T	Physiologie générale.
LWOFF	T	Microbiologie.
SIESTRUNCK	T	Mécanique physique et expérim.
CABANNES	T	Mécanique générale.
CAIRE	T	Géographie physique et géologie dynamique.
COMOLET		Mécanique des fluides.
DELLOUE	T	Physique de l'exosphère.
HOUILLON		Biologie animale C.P.E.M.
OLIVIER		Anthropologie.
SAMUEL	T	Mathématiques (ENS Jeunes filles)
THIRY	T	Mécanique céleste.
ABELES	T	Physique S.P.C.N.
AMAT	T	Thermodynamique.
AUBOIN	T	Géologie.
GUILBERT	T	Physique CUS Orléans
YVON	T	Théories physiques.
Mme BENOIT-GUEUTAL	T	Physique nucléaire et radio-activité.
BOUGIS		Biologie végétale marine Villefranche s/Mer
RIGAUDY	T	Chimie S.P.C.N.
COLLONGUES		Chimie C.P.E.M.
DUBERT		Biochimie.
NOZIERES		Physique générale.
CADIOT		Chimie organique.
IVANOFF		Océanographie physique.
FRANÇOIS		Zoologie.
TALBOT		Génie chimique.
Mme NOUGAREDE		Botanique.
BRUHAT	T	Mathématique M.P.C.
FOURNET		Electricité générale.
DEHEUVELS	T	Mathématiques propédeutique.
FURON	T	Géologie S.P.C.N.
Mme GANS	T	Génétique.
GENEVES		Biologie végétale C.P.E.M.
HUPE	T	Pétrographie.
HOLLANDE	T	Biologie générale.
LIONS	T	Analyse numérique.
MAITTE	T	Chimie organique.
NICOLAS		Géologie appliquée.
PANIGEL		Biologie générale.
RAVIER	T	Pétrographie.
MOREL F.	T	Physiologie comparée.
ROSEAU	T	Mécanique théorique des fluides.
ROUBINE		Electronique E.S.E.
SILBER	T	Chimie C.P.E.M.
UEBERSFELD	T	Electronique.
	T	Théories physiques.
HERVE	T	Mathématiques.
Mme PECKER-WIMEL	T	Astrophysique.
BALKANSKI		Physique M.P.C.
LE CORRE	T	Electricité.
NATAF	T	Physique nucléaire et radio-activité.
ECHALIER		Biologie animale C.P.E.M.
BARRAUD	T	Physique C.P.E.M.
DARS		Géologie structurale et appliquée.
CAMEFORT	T	Botanique (agrégation).
VICHNIEWSKY	T	Mécanique industrielle.
SIGWALT	T	Chimie S.P.C.N.
BLAQUIERE		Electronique.
BARUCH		Physique propédeutique.
ARNOUS	T	Physique théorique.
SLONIMSKI		Génétique.
MALLIAVIN	T	Mathématiques propédeutique.
GAUDEMAR		Chimie propédeutique.
BROUSSE	T	Mécanique théorique.
ROSCH	T	Astronomie.
GUY	T	Physique expérimentale.
LAZARD		Mathématiques M.P.C.
MOREL P.		Physique M.P.C.
ARSAC		Programmation.
LEFEBVRE		Chimie M.P.C.
BOK		Physique propédeutique.
CHAPEVILLE		Biochimie.
BENOIT		Physique C.P.E.M.
RIO		Chimie C.P.E.M.
JAUZEIN		Géologie E.N.S.
PREVOST G.		Biologie végétale C.P.E.M.
TATIBOUET		Chimie CUS Orléans

....

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ D'ORSAY

PROFESSEURS

MANGENOT G.	T	Biologie végétale.
JACQUINOT P.	T	Optique.
GUINIER A.	T	Electricité et physique des solides.
GRIVET P.	T	Electronique.
BLANC-LAPIERRE A.	T	Accélérateur linéaire.
L'HERITIER P.	T	Génétique des virus.
LEMEE G.	T	Ecologie végétale.
MOYSE A.	T	Physiologie végétale.
DODE M.	T	Chimie thermodynamique.
DENY J.	T	Mathématiques.
RIVIERE A.	T	Géologie générale et sédimentologie.
MICHEL A.	T	Chimie minérale.
MAY R.	T	Anatomie comparée.
DELANGE H.	T	Mathématiques.
CHAPELLE J.	T	Physique expérimentale.
LACOMBE P.	T	Métallurgie.
GUINOCHET J.	T	Biologie végétale S.P.C.N.
NERON A.	T	Mathématiques.
NOZERAN R.	T	Botanique approfondie.
CASTAING R.	T	Thermodynamique.
ELLENBERGER F.	T	Géologie structurale.
LEDERER E.	T	Chimie biologique.
RIZET J.	T	Génétique.
LENDER T.	T	Biologie animale S.P.C.N.
BENOIT P.	T	Physiologie générale.
FREON P.	T	Chimie organique.
TONNELAT	T	Biologie physico-chimique.
BRUNN Jan	T	Géologie historique.
JEAN M.	T	Physique nucléaire.
BERGERARD J.	T	Zoologie.
JULLIEN J.	T	Chimie structurale organique.
ARNULF A.	T	Optique.
ROUAULT M.	T	Diffraction électronique.
MARECHAL A.	T	Optique théorique et appliquée.
MAZET R.	T	Mécanique générale.
DAVID Serge	T	Chimie agrégation.
GUERIN H.	T	Chimie des gaz et des combustibles.
LESIEUR L.	T	Mathématiques M.P.C. et algèbre.
KOURGANOFF	T	Astronomie.
ARNOULT P.	T	Physique électronique.
KAHANE J.P.	T	Mathématiques.
BROCHARD J.	T	Physique propédeutique.
Mme ROIZEN	T	Physique C.P.E.M.
BERTEIN F.	T	Electronique.
MALGRANGE B.	T	Mathématiques.
CORABOEUF E.	T	Physiologie animale.
FRIEDEL J.	T	Physique des solides.
CHEVAUGEON J.	T	Cryptogamie.
MEYER P.	T	Physique théorique et atomique.
LEHMANN P.	T	Accélérateur linéaire.
CHABBAL R.	T	Physique propédeutique.
DELCROIX J.M.	T	Physique des plasmas.
CERF J.	T	Mathématiques.
D'ESPAGNAT B.	T	Physique théorique.
SCHAEFFER P.	T	Microbiologie.
DE GENNES P.	T	Physique des solides.
GOURDIN M.		Physique théorique.
PEREZ-Y-JORBA		Physique propédeutique.
GORENFLOT E.		Biologie végétale S.P.C.N.
RIOU M.		Physique nucléaire.
BROUSSE R.		Géologie S.P.C.N.
LIORET C.		Physiologie végétale.
CLAUSER H.		Chimie biologique.
JANCOVICI B.		Physique atomique.
LURCAT J.		Physique propédeutique.
LE BERRE J.		Entomologie.
LAVOREL J.		Biophysique.
CHEVALLIER F.		Physiologie animale.
FETIZON M.		Stéréochimie.
VILKAS M.		Chimie C.P.E.M.
FAVARD P.		Biologie animale C.P.E.M.
Mme CHARNIAUX-COTTON		Evolution des êtres organisés.
Melle FICINI		Chimie C.P.E.M.
LEQUEUX		Astronomie.
COHEN TANNOUDJI		Physique atomique.
TAVERNIER		Physique C.P.E.M.
DURAND Michel		Biologie animale S.P.C.N.
PASCAUD		Physiologie.
Mme PETIT		Biologie animale C.P.E.M.
CAGNAC		Physique agrégation.
FALK-VAIRANT		Physique nucléaire.

Secrétaire Général . . . . . R. POULLAIN

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544321_0040

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ — 2

CHAPITRE I. INTRODUCTION — 3

I.1. - GÉNÉRALITÉS — 3

I.2. - ASPECTS ABORDÉS DANS CE TRAVAIL — 4

CHAPITRE II. ÉCOULEMENTS AVEC RÉACTIONS CHIMIQUES RAPIDES. THÉORIE MATHÉMATIQUE — 5

II.1. - ÉQUATIONS DES ÉCOULEMENTS AVEC RÉACTIONS CHIMIQUES RAPIDES — 5

II.2. - STABILITÉ DES SOLUTIONS — 8

II.3. - ÉQUIVALENCE ENTRE LES EFFETS DES RÉACTIONS CHIMIQUES RAPIDES ET CEUX D'UNE VISCOSITÉ DE VOLUME. DÉFINITION D'UN OPÉRATEUR DE VISCOSITÉ DE VOLUME — 13

II.4. - CONDITIONS DE CHOC — 17

II.5. - ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS UNIDIMENSIONNELS SUR LA BASE DES TRAVAUX DE VASSILIEVA ET WASOW — 25

CHAPITRE III. ÉCOULEMENTS AVEC RÉACTIONS CHIMIQUES RAPIDES. APPLICATIONS. — 27

III.1. - ONDES DE CHOC FAIBLES — 27

III.2. - ÉCOULEMENT AVEC RÉACTIONS RAPIDES ET AVEC CONDITIONS INITIALES HORS D'ÉQUILIBRE DANS LES TUYÈRES — 35

III.3. - ÉCOULEMENT HYPERSONIQUE AUTOUR D'UN CORPS ÉMOUSSÉ DE RÉVOLUTION AU VOISINAGE DE L'AXE DE SYMÉTRIE — 38

CHAPITRE IV. ÉCOULEMENTS AVEC RÉACTIONS CHIMIQUES LENTES — 45

IV.1. - CONSIDÉRATIONS SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DES ÉCOULEMENTS AVEC RÉACTIONS CHIMIQUES LENTES — 45

IV.2. - ÉCOULEMENT HYPERSONIQUE AUTOUR D'UN CORPS ÉMOUSSÉ DE RÉVOLUTION AU VOISINAGE DE L'AXE DE SYMÉTRIE — 49

CHAPITRE V. ÉTUDE DE LA TRANSITION ENTRE LA ZONE DE RÉACTIONS RAPIDES ET LA ZONE DE RÉACTIONS LENTES — 54

V.1. - CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES — 54

V.2. - ÉTUDE DU FIGEAGE CHIMIQUE RAPIDE DE L'ÉCOULEMENT DANS UNE TUYÈRE — 56

CONCLUSION — 65

BIBLIOGRAPHIE — 67

RÉSUMÉ

Des méthodes permettant l'étude des trois zones d'un écoulement avec réactions chimiques sont proposées. Pour la zone des réactions rapides, l'équivalence des effets chimiques avec les effets d'une viscosité de volume est démontrée et l'on en déduit les conditions de choc appropriées. Pour la zone des réactions lentes on se base sur le fait, mis en évidence sur un exemple, que la couche limite chimique est d'une épaisseur exponentiellement petite. L'analyse de la zone de figeage est effectuée par la méthode du raccordement de développements asymptotiques, avec un choix convenable du petit paramètre.

Les méthodes développées sont appliquées à l'étude des ondes de choc complètement dispersées, de l'écoulement dans une tuyère et de l'écoulement de révolution autour d'un corps émoussé, au voisinage de l'axe de symétrie.

CONTRIBUTION TO THE THEORY OF FLOWS INCLUDING CHEMICAL REACTIONS

by Ernest LARISCH

SUMMARY

Methods permitting the study of the three zones of flows including chemical reactions are proposed. For the fast-reaction zone it is shown that chemical effects are equivalent to volume viscosity effects and thus the appropriate shock conditions are deduced. For the slow-reaction zone we base our considerations on the fact, shown by an example, that the chemical boundary-layer has an exponentially small thickness. The analysis of the zone of chemical freezing is carried out by the method of matching asymptotic expansions with an appropriate choice of the small parameter.

The methods developed are applied to the study of fully dispersed shock waves, of nozzle flow and of the axi-symmetric flow around a blunt body in the region near the axis of symmetry.

Chapitre I

INTRODUCTION

I.1. - GÉNÉRALITÉS.

Le développement de la théorie des écoulements des gaz qui sont le siège de processus de relaxation a été favorisé, d'une part, par l'augmentation de la vitesse des engins volants et, d'autre part, par le perfectionnement des propulseurs. Aux températures élevées qui se produisent dans les écoulements hypersoniques, le gaz se présente comme un mélange de molécules d'espèces chimiques variées qui se trouvent dans divers états énergétiques internes. A cause des collisions intermoléculaires, la composition du mélange varie le long des lignes du courant.

Une description microscopique de l'état du gaz est donnée par la matrice $\| f_{i\{k\}}(X,V) \|$ dont les éléments ont le sens de fonctions de distribution se rapportant aux molécules de type i se trouvant dans l'état quantique $\{k\}$, défini par les nombres quantiques k_j. Dans l'approximation qui consiste à traiter le gaz comme étant un milieu continu, l'on procède à un classement des paramètres, qui caractérisent l'état d'une molécule, en paramètres "mécaniques" et paramètres "chimiques". A la première classe appartiennent les paramètres dont le temps de relaxation est petit par rapport au temps caractéristique de l'écoulement. Dans la deuxième classe qui, par hypothèse, ne contient que des quantités prenant des valeurs discrètes, entrent les paramètres dont le temps de relaxation est comparable au temps caractéristique de l'écoulement.

Dans les conditions ci-dessus, il est possible d'écrire un système d'équations du mouvement qui donne une description macroscopique de l'état mécanique, mais qui est partiellement microscopique par rapport aux variables chimiques. L'état d'une molécule fluide est caractérisé par deux paramètres thermodynamiques, par le vecteur vitesse et par un vecteur $\{\xi_i\}\ i=1 \ldots N$ dont les composantes déterminent les valeurs moyennes des n variables chimiques du gaz. Les équations du mouvements sont celles de NAVIER-STOCKES, auxquelles viennent s'ajouter N équations de cinétique chimique décrivant l'évolution des paramètres le long des lignes de courant.

Les difficultés de l'étude de la Dynamique des gaz de composition variable ont leur origine dans les équations de cinétique chimique qui contiennent des termes à la fois compliqués et assez mal connus. Néanmoins, l'on dispose à l'heure actuelle d'une théorie cohérente et un grand nombre de problèmes d'écoulement ont été abordés. La bibliographie présentée n'a pas la prétention d'être complète. Parmi les ouvrages et articles de synthèse, nous citons [1-12]. La structure des ondes de choc a été étudiée entre autre dans les travaux [64-70]. L'on a pu analyser avec succès divers problèmes linéarisés : propagation du son [22-24], écoulement auprès d'une paroi ondulée [27-28], écoulement autour d'un dièdre [45-47], écoulement autour d'un profil mince [21-23-24]. Des résultats importants concernant l'écoulement autour d'un obstacle émoussé ont été obtenus par l'auteur du travail [48] qui a étudié l'influence des réactions chimiques sur l'écoulement dans l'approximation Newtonienne. Les travaux mentionnés utilisent souvent un schéma simplifié de cinétique chimique, celui du gaz de LIGHTHILL, qui

a été proposé dans les articles [7 -51]. Parmi le grand nombre de travaux dans lesquels des problèmes non-linéaires d'écoulement de l'air sont étudiés par des méthodes numériques, nous mentionnons les articles [42-47] pour l'écoulement autour des cônes et dièdres, les articles [30-41] pour l'écoulement dans les tuyères, les articles [56-58-59] pour l'écoulement autour des corps émoussés. Comme règle générale, les calculs numériques sont basés sur la méthode des caractéristiques dans la zone supersonique.

I.2. - ASPECTS ABORDÉS DANS CE TRAVAIL.

Les problèmes traités dans cette étude sont relatifs à des gaz dont on néglige les propriétés de transfert : viscosité, diffusion, conduction de chaleur(*). L'écoulement avec réactions chimiques autour d'un obstacle est souvent bien décrit en supposant la présence de trois zones : une zone de réactions rapides, une zone de transition, une zone de réactions lentes. Nous avons étudié les propriétés de l'écoulement dans chacune de ces trois zones, en espérant de contribuer ainsi à l'élaboration d'un tableau d'ensemble.

La division en chapitres de ce travail suit la classification des réactions chimiques en rapides, normales et lentes. Le chapitre II est consacré à l'étude des propriétés des solutions des équations des écoulements avec réactions chimiques rapides. Nous proposons une définition de la "distance à l'équilibre chimique" qui permet de démontrer la propriété suivante : dans un écoulement avec réactions rapides, tout écart important de l'équilibre chimique tend à être résorbé. Nous montrons que l'effet des réactions chimiques peut s'exprimer, à l'aide d'un coefficient de viscosité de volume, pour tout écoulement avec réactions rapides, et à l'aide d'un opérateur de viscosité de volume pour tout écoulement linéarisé avec cinétique chimique quelconque. L'utilisation d'une méthode proposée par GERMAIN et GUIRAUD permet de déduire des conditions de choc qui tiennent compte de l'effet des réactions chimiques rapides. Les rapports entre les valeurs prises par les paramètres du gaz sur les deux faces du choc dépendent, en dehors des rayons de courbure de celui-ci, de deux "épaisseurs de déplacement". Ces quantités ont été calculées numériquement dans le cas d'un gaz de LIGHTHILL. Nous discutons ensuite la possibilité d'utiliser les résultats obtenus par VASSILIEVA [78] et WASOW [79] pour démontrer certaines propriétés des solutions dans le cas de l'écoulement dans une tuyère.

Le chapitre III contient des applications de la méthode de la viscosité de volume. Les ondes de choc complètement dispersées sont étudiées en partant d'une seule équation intégro-différentielle à laquelle on aboutit et dans le cas d'une seule réaction nous donnons des courbes permettant de déterminer la variation des paramètres à l'intérieur du choc. L'étude de l'écoulement avec réactions rapides et conditions initiales hors d'équilibre dans une tuyère montre que la solution se détermine par une seule quadrature. Des résultats particulièrement simples sont obtenus pour l'écoulement hypersonique autour d'un corps émoussé au voisinage de la ligne d'arrêt. La solution a la même forme que celle obtenue dans le cas d'un écoulement en équilibre, après le remplacement de certaines constantes par des valeurs effectives.

Une autre situation fréquemment rencontrée est celle des réactions chimiques lentes ; le chapitre IV lui est consacré. Après une discussion générale des équations, nous avons étudié en détail l'écoulement autour d'un corps émoussé, au voisinage de la ligne d'arrêt. Nous avons montré qu'en utilisant un certain modèle qui paraît raisonnable, la solution s'exprime à l'aide de trois fonctions qui ont été calculées numériquement.

Dans les écoulements réels, une zone de réactions chimiques rapides précède généralement la zone de réactions lentes, ces deux zones étant séparées par une zone de transition (ou de figeage) chimique. Dans le chapitre V, nous proposons une méthode qui permet, en principe, d'étudier la structure d'une zone de transition de faible épaisseur. Les résultats de cette étude

---

(*) A l'exception du § III.1 .

sont nécessaires à la détermination des conditions aux limites pour la zone d'écoulement presque figé. Le petit paramètre du problème est mis en évidence. L'on donne ensuite une méthode qui permet de déterminer la solution sous la forme d'un développement asymptotique en puissances de ce paramètre. Les calculs sont explicités pour le premier terme du développement.

Je suis heureux de pouvoir remercier MM. P. CARRIÈRE, H. CABANNES et J.-P. GUIRAUD pour l'intérêt accordé à ce travail et pour les nombreuses suggestions dont je leur suis redevable. Je remercie M.E. SCHATZMANN qui a bien voulu me proposer le sujet de la deuxième thèse. Je tiens à remercier également M. M. BARRÈRE qui a eu l'amabilité de lire le manuscrit et de discuter son contenu.

Chapitre II

ÉCOULEMENTS AVEC RÉACTIONS CHIMIQUES RAPIDES. THÉORIE MATHÉMATIQUE.

II,1. - ÉQUATIONS DES ÉCOULEMENTS AVEC RÉACTIONS CHIMIQUES RAPIDES.

Nous rappelons ici les équations qui régissent le mouvement des mélanges ainsi que les principales relations thermodynamiques qui leur sont associées. Le gaz en mouvement est composé de K espèces de molécules M_i ; les molécules se trouvant à divers niveaux énergétiques sont considérées comme appartenant à autant d'espèces chimiques différentes. Les N réactions chimiques indépendantes ($N<K$) évoluent suivant les schémas :

$$\text{(II.1)} \qquad \sum_{i=1}^{K} \nu'_{i,j} M_i \rightleftarrows \sum_{i=1}^{K} \nu''_{i,j} M_i \qquad i = 1 \ldots N$$

Au lieu de décrire la composition du mélange à l'aide des concentrations des différentes especes, il est préférable d'utiliser les degrés d'avancement des réactions chimiques, qui ont l'avantage de former un système de variables indépendantes. Soit n_i le nombre de molécules d'espèce i par unité de masse de gaz. Les quantités n_i ayant initialement les valeurs $n_i^{(0)}$, pour une certaine masse de gaz, tout ensemble ultérieur de valeurs possibles est donné par des relations de la forme

$$\text{(II.2)} \qquad n_i = n_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{N} \xi_j \nu_{i,j} \qquad j = 1 \ldots K$$

qui définissent les N degrés d'avancement ξ_j. On a noté

$$\nu_{i,j} = \nu''_{i,j} - \nu'_{i,j} .$$

Compte tenu des réactions chimiques, l'identité thermodynamique fondamentale s'écrit :

$$\text{(II.3)} \qquad dh = \frac{dp}{\rho} + T\, ds - T \sum_{j=1}^{N} A_j\, d\xi_j$$

où p est la pression, T la température, h , ρ , s l'enthalpie, la masse et l'entropie spécifiques, A_j (*) les affinités des réactions chimiques. Les relations suivantes permettent de déterminer les affinités en fonction des potentiels chimiques μ_i des composants du mélange

$$A_j = -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^{K} \nu_{i,j}\, \mu_i .$$

Un état thermodynamique du gaz est déterminé par les valeurs de deux paramètres thermodynamiques et par les valeurs des degrés d'avancement; l'état peut donc être représenté par un point dans un espace à $N + 2$ dimensions. Les états d'équilibre chimique du gaz sont définis par le système d'équations

$$A_j(\rho, s, \xi) = 0 \qquad\qquad j = 1 \ldots N$$

qui détermine de manière univoque les N fonctions

$$\xi_j^* = \varphi_j(\rho, s) \qquad\qquad j = 1 \ldots N$$

donnant les valeurs des degrés d'avancement dans les états d'équilibre chimique. A côté des états d'équilibre, qui forment une variété à deux dimensions, l'on est amené à considérer des états d'équilibre partiel, en les définissant par des systèmes d'équations

$$A_j(\rho, s, \xi) = 0 \qquad\qquad j = 1 \ldots N', \qquad N' < N$$

qui conduisent à des compositions d'équilibre partiel

$$\xi_{j,N'}^* = \varphi_{j,N'}(\rho, s, \xi_{N'+1} \ldots \xi_N).$$

A une seule exception près, nous ne considérons dans ce travail que des écoulements de gaz non visqueux, non conducteurs de chaleur et sans diffusion, les équations du mouvement s'obtiennent en ajoutant aux équations d'EULER $N + 1$ équations décrivant la variation des degrés d'avancement et celle de l'entropie le long des lignes de courant. Le système d'équations du mouvement prend la forme suivante :

(II.4) $$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

(II.5) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\ \mathbf{v}) = 0$$

(II.6) $$\frac{D\xi_i}{Dt} = L_i(\rho, s, \xi)$$

(II.7) $$\frac{Ds}{Dt} = \sum_{i=1}^{N} A_i L_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{N} A_i L_i > 0$$

(II.8) $$p = F(\rho, s, \xi).$$

La pression qui intervient dans ces équations est définie comme étant la partie sphérique du tenseur des pressions, indépendante des gradients de la vitesse macroscopique. Les N

(*) Cette définition des affinités, qui englobe le facteur $1/T$ est adopté pour la commodité de l'écriture.

fonctions L_i sont les vitesses de réaction ; à l'heure actuelle ces fonctions se déterminent par des procédés mi-théoriques, mi-expérimentaux et l'incertitude sur leurs valeurs est importante, de l'ordre de 100%.

Plusieurs "célérités du son" peuvent être définies dans un mélange : les plus importantes sont :

— la célérité du son à l'équilibre

$$a_e^2 = \left[\frac{\partial F(\rho, s, \varphi(\rho, s))}{\partial \rho}\right]_s \tag{II.9}$$

— la célérité du son figée

$$a_f^2 = \left[\frac{\partial F(\rho, s, \xi)}{\partial \rho}\right]_{s,\xi} \tag{II.10}$$

Le système (II.4 - II.8) possède $N + 3$ caractéristiques. La direction de deux caractéristiques est déterminée par la célérité du son figée ; les autres caractéristiques sont confondues avec les lignes de courant.

Les problèmes aux limites pour les équations (II.4 - II.8) se posent de la même manière que dans le cas des gaz inertes avec, en plus, des valeurs initiales pour les degrés d'avancement sur une partie de la frontière de l'écoulement. Cette partie de la frontière est généralement formée par la face aval d'ondes de choc dont la position est inconnue a priori. Les chocs visqueux sont traités comme étant sans épaisseur et à leur traversée les degrés d'avancement ne subissent pas de variation.

Les propriétés des fonctions A_i, L_i, F sont importantes pour la résolution des problèmes aux limites. On admet généralement que ces fonctions sont des fonctions continues de leurs arguments et qu'elles possèdent un nombre suffisant de dérivées.

Les réactions chimiques n'avancent pas dans un état d'équilibre thermodynamique, les fonctions φ_j , définies antérieurement, sont donc aussi les racines du système

$$L_i(\rho, s, \varphi) = 0 \qquad i = 1 \ldots N$$

Pour des états voisins de l'équilibre thermodynamique, les affinités peuvent être représentées sous la forme

$$A_i = -\sum_K \alpha_{ik}(\rho, s)(\xi_k - \xi_k^*) + 0(\xi - \xi^*)^2 \tag{II.11}$$

la matrice $a = \| a_{ik} \|$ étant symétrique. Une représentation analogue est valable pour les vitesses de réaction

$$L_i = -\sum_K l_{ik}(\rho, s)(\xi_k - \xi_k^*) + 0(\xi - \xi^*)^2 \tag{II.12}$$

Les valeurs propres de la matrice $l = \| l_{ik} \|$ sont toutes positives ; ceci découle du fait que l'état d'équilibre thermodynamique est un état stable. Enfin, le théorème sur la symétrie des coefficients cinétiques impose la symétrie de la matrice $l a^{-1}$.

Pour pouvoir effectuer une comparaison des importances relatives des différentes réactions chimiques, nous écrivons les équations du mouvement sous forme adimensionnelle à l'aide d'un système de paramètres de référence. Soit donc :

$$p = \rho_r v_r^2 \bar{p} \qquad \rho = \rho_r \bar{\rho} \qquad L_i = |L_{i,r}| \bar{L}_i$$

$$s = s_r \bar{s} \qquad A_i = s_r \bar{A}_i \qquad \mathbf{v} = v_r \bar{\mathbf{v}} \qquad \mathbf{x} = \Lambda \bar{\mathbf{x}}$$

et nous considérons, pour fixer les idées, un écoulement stationnaire. L'indice r affecte les paramètres de référence, les quantités surlignées sont sans dimension et Λ est une longueur caractéristique de la géométrie du problème. L'équation de la quantité de mouvement et l'équation de continuité, conservent leur forme dans le système de variables surlignées. Les équations de la cinétique chimique deviennent :

$$\mathbf{v} \cdot \bar{\nabla} \xi_i = \frac{|L_{i,r}| \Lambda}{v_r} \bar{L}_i \ .$$

Nous introduisons ici une hypothèse importante dont nous ferons constamment usage dans la suite de l'exposé.

HYPOTHÈSE - Il est possible de trouver un nombre positif $\varepsilon \ll 1$, des nombres entiers α_i positifs, négatifs ou nuls et des nombres positifs ω_i, $\omega_i \sim 1$, tels que les vitesses de réaction à l'état de référence soient données par des relations de la forme

(II.13)
$$\frac{|L_{i,r}| \Lambda}{v_r} = \omega_i \varepsilon^{\alpha_i} \ .$$

Une justification théorique de cette hypothèse est difficile à obtenir, les quantités L_i étant entièrement indépendantes les unes des autres. Néanmoins, en pratique, une représentation à l'aide des relations de la forme (II.13) est généralement possible.

La classification des réactions chimiques s'effectue maintenant de la manière suivante :

1. $\alpha_i < 0$ réactions rapides
2. $\alpha_i = 0$ réactions normales
3. $\alpha_i > 0$ réactions lentes.

L'effet des réactions des types 1. et 3. est étudié dans les chapitres II, III et IV de ce travail. La présence de réactions chimiques à vitesse normale introduit des complications considérables et il est difficile d'énoncer des résultats généraux valables pour un écoulement qui est le siège de réactions de ce type. Une situation dans laquelle les réactions normales sont confinées à une couche de faible épaisseur est analysée dans le Chapitre V.

II.2. - STABILITÉ DES SOLUTIONS.

Nous passons à l'étude des écoulements avec réactions rapides uniquement. Nous supposons donc que tous les nombres α_i sont négatifs. Notons $\beta_i = -\alpha_i$ et soit $\beta = \inf \beta_i$. Les équations du mouvement contiennent des polynômes du petit paramètre ε et le problème envisagé est celui de la relation entre l'écoulement obtenu dans le cas extrême $\varepsilon = 0$ et les écoulements qui se réalisent pour des valeurs de ε petites mais différentes de zéro. Le comportement des solutions pour $\varepsilon \to 0$ nécessite une étude spéciale, car ce passage à la limite est singulier pour les équations de la cinétique chimique. La perturbation singulière de la solution au voisinage de $\varepsilon = 0$ a été étudiée par différents auteurs [31 - 32 - 54].

Nous supposons que les équations du mouvement possèdent, pour toute valeur de ε, une solution unique qui définit un écoulement continu dans des domaines dépourvus d'ondes de choc ; soit $\bar{M}(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon)$ cette solution. En posant $\varepsilon = 0$, les équations du mouvement se réduisent

à celles d'Euler, avec une équation d'état de la forme

$$p = F[\rho, s, \varphi(\rho, s)] = F^*(\rho, s).$$

C'est donc un problème bien classique et nous admettons qu'il possède une solution unique que nous désignerons par $\overline{M}_0(\mathbf{x})$.

On sait que deux situations, très différentes l'une de l'autre, peuvent se présenter pour des systèmes aux perturbations singulières :

1. Le système est stable par rapport au passage à la limite $\varepsilon \to 0$. La condition de stabilité s'esprime par la relation

(II.14) $$\overline{M}_0(\bar{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \to 0} \overline{M}(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon)$$

2. Le système est instable par rapport au passage à la limite $\varepsilon \to 0$. On a

(II.15) $$\overline{M}_0(\bar{\mathbf{x}}) \neq \lim_{\epsilon \to 0} \overline{M}(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon)$$

L'importance de la stabilité consiste surtout dans le fait suivant dont la démonstration n'a été donnée que pour le cas unidimensionnel: assez loin en aval des surfaces sur lesquelles sont données des conditions aux limites une solution stable peut être représentée par un développement asymptotique en puissances du petit paramètre ε :

(II.16)
$$M = M_0 + M_1 + o(\varepsilon^\beta)$$
$$\overline{M} = \overline{M}_0 + \varepsilon^\beta \overline{M}_1 + o(\varepsilon^\beta)$$

En revenant aux écoulements avec réactions chimiques, la question est donc de savoir si, en l'aval des surfaces sur lesquelles sont données des conditions aux limites pour les degrés d'avancement, l'on a

(II.17) $$\lim_{\epsilon \to 0} |\xi_i - \varphi_i(\rho, s)| \to 0 \qquad i = 1 \ldots N$$

La réponse à cette question est donnée par le théorème démontré ci-après :

THÉORÈME - Si un écoulement avec réactions chimiques rapides possède une solution unique, cette solution est stable.

La démonstration de ce théorème s'effectue en deux étapes. On trouve d'abord une représentation convenable de la "distance" à l'équilibre chimique d'un ensemble de paramètres qui caractérisent l'écoulement en un point $\mathbf{x}$. Ensuite, on montre que la distance à l'équilibre est une fonction rapidement décroissante, en vertu des équations du mouvement.

Les paramètres de l'écoulement au point $\mathbf{x}$ sont

(II.18) $$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})\,\nu(\mathbf{x}) \quad , \quad p(\mathbf{x}) \ldots$$

ν étant le vecteur unitaire de la vitesse. En même temps, avec l'écoulement étudié, nous considérons un écoulement unidimensionnel de relaxation, parallèle à un axe k, d'un fluide dont les paramètres dans le plan $k = 0$ prennent les valeurs données par les relations (II.18). Cet écoulement est décrit par les équations

(II.19)
$$p + \mathcal{J} v = p(\mathbf{x}) + \mathcal{J} v(\mathbf{x}) = P$$
$$\rho v = \rho(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x}) = \mathcal{J}$$
$$h + \frac{1}{2} v^2 = h(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} v^2(\mathbf{x}) = H \qquad \ldots\ldots$$

(II.19) (suite)

$$v \frac{d\xi_i}{dk} = L_i(\rho, s, \xi)$$

$$h = G(\rho, s, \xi) \qquad p = F(\rho, s, \xi)$$

Dans des conditions assez générales, imposées à la nature des fonctions F, G, L_i, le système d'équations (II.19) possède une solution unique, continue, valable pour $k > 0$, que nous notons $p_k(\mathbf{x})$, $\rho_k(\mathbf{x})$ ..... L'état du fluide pour $k = \infty$ est défini par les relations $L_i = 0$, c'est donc un état d'équilibre chimique qui se détermine par des calculs algébriques uniquement. On a, en effet, les relations algébriques

$$p_\infty(\mathbf{x}) + \rho_\infty(\mathbf{x})\, v_\infty(\mathbf{x}) = P$$

$$\rho_\infty(\mathbf{x})\, v_\infty(\mathbf{x}) = J$$

$$h_\infty(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} v_\infty^2(\mathbf{x}) = H$$

$$\varphi_i[\rho_\infty(\mathbf{x}),\ s_\infty(\mathbf{x})] = 0 \qquad i = 1 \ldots N$$

Le point $p_\infty(\mathbf{x}), \rho_\infty(\mathbf{x})$ ... est un point de stabilité du système (II.19) qui possède l'évidente fonction de Liapounov

$$\mathcal{L} = s_\infty(\mathbf{x}) - s_k(\mathbf{x}).$$

Soulignons que les quantités $p_\infty(\mathbf{x}), \rho_\infty(\mathbf{x})$ ... dépendent des valeurs initiales $p(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x})$ ... uniquement par l'intermédiaire des paramètres P , J , H ; elles sont indépendantes de la cinétique chimique.

Considérons maintenant la fonction :

(II.20)
$$\mathcal{D}^2 = s_\infty(\mathbf{x}) - s_0(\mathbf{x}),$$

ou

$$s(\mathbf{x}) = s_0(\mathbf{x}).$$

En vertu du second principe de la thermodynamique

(II.21)
$$\mathcal{D}^2 \geqslant 0.$$

On vérifie facilement les relations suivantes

(II.22)
$$\mathcal{D}^2 \neq 0 \qquad \text{si} \quad \xi_i(\mathbf{x}) \neq \xi_i^*(\mathbf{x}) \ , \ \xi_i^*(\mathbf{x}) = \varphi_i[\rho(\mathbf{x}), s(\mathbf{x})]$$

$$\mathcal{D}^2 = 0 \qquad \text{si} \quad \xi_i(\mathbf{x}) = \xi_i^*(\mathbf{x}).$$

En effet

$$\mathcal{D}^2 = \sum_{i=1}^{N} \int_0^\infty A_i\left[\rho_k(\mathbf{x}), s_k(\mathbf{x})\, \xi_k(\mathbf{x})\right] L_i\left[\rho_k(\mathbf{x}), s_k(\mathbf{x}), \xi_k(\mathbf{x})\right] \frac{dk}{v_k(\mathbf{x})}$$

la fonction $\mathcal{D}^2(\mathbf{x})$ prend donc des valeurs positives et différentes de zéro si les fonctions $A_{i,k}(\mathbf{x})$, $L_{i,k}(\mathbf{x})$ ne sont pas identiquement nulles. Mais l'on a

$$A_{i,k} \equiv 0 \qquad L_{i,k} \equiv 0$$

uniquement si les conditions initiales sont

$$A_{i,0}(\mathbf{x}) = 0 \qquad L_{i,0}(\mathbf{x}) = 0$$

car l'écoulement le long de l'axe k dégénère alors en un écoulement uniforme. Les relations (II.21, II.22) montrent que la fonction $\mathcal{Q}^2$ convient pour exprimer la " distance " à l'équilibre chimique au point $\mathbf{x}$. Les équations du mouvement fournissent pour les dérivées des quantités P, $\mathcal{J}$, H *le* long des lignes de courant les relations

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \nabla P &= -\rho v^2 \nabla \nu \\ \mathbf{v} \nabla \mathcal{J} &= -\rho v^2 \nabla \nu \\ \mathbf{v} \nabla H &= 0 \end{aligned} \tag{II.23}$$

La deuxième des relations ci-dessus est une autre forme de l'équation de continuité. La première s'obtient en multipliant scalairement par $\mathbf{v}$ l'équation de la quantité de mouvement et en observant que l'on a

$$\rho \mathbf{v} \nabla v^2 = \mathbf{v} \nabla (\rho v^2) - v^2 \mathbf{v} \nabla \rho = \mathbf{v} \nabla (\rho v^2) + v^2 \left[\rho v \nabla \nu + \frac{1}{2v^2} \rho \mathbf{v} \nabla v^2 \right].$$

Nous utilisons la notation $s_\infty(P, \mathcal{J}, H)$ au lieu de $s_\infty(\mathbf{x})$ pour mettre en évidence les arguments dont cette quantité dépend effectivement. Les relations (II.23) conduisent à la forme suivante de la dérivée totale de la "distance à l'équilibre"

$$\mathbf{v} \nabla \mathcal{Q}^2 = -\sum_{i=1}^{N} A_i L_i - \rho v^2 \left[\frac{\partial s_\infty (P, \mathcal{J}, H)}{\partial \mathcal{J}} + v \frac{\partial s_\infty (P, \mathcal{J}, H)}{\partial P} \right] \nabla \nu. \tag{II.24}$$

La forme adimensionnelle de cette égalité est

$$\bar{\mathbf{v}} \bar{\nabla} \bar{\mathcal{Q}}^2 = -\sum_i \omega_i \varepsilon^{-\beta_i} \bar{A}_i \bar{L}_i - \bar{\rho} \bar{v}^2 \left[\frac{\partial \bar{s}_\infty}{\partial \bar{\mathcal{J}}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{s}_\infty}{\partial \bar{P}} \right] \bar{\nabla} \nu. \tag{II.25}$$

Le membre de droite est une somme de deux termes dont les structures sont bien différentes l'une de l'autre. Le premier terme se présente sous la forme d'une somme dont la valeur, toujours négative en vertu de l'équation (II.7), dépend de la cinétique chimique. Le second terme est le produit d'une quantité qui dépend des paramètres de l'écoulement au point $\mathbf{x}$ mais qui est indépendante de la cinétique chimique, et de $\bar{\nabla} \nu$, dont la valeur dépend de la cinétique chimique. Les hypothèses faites au début de ce paragraphe montrent que si l'on a $\nabla \nu \neq 0$ pour $\varepsilon \neq 0$, alors

$$\lim_{\epsilon \to 0} |\nabla \nu| < a \qquad 0 < a < \infty \tag{II.26}$$

sauf, peut être, sur des lignes isolées, ou dans certains domaines qui constituent pour notre raisonnement des cas d'exception. Il est facile de voir quel est dans ces cas l'écoulement obtenu, dans le cas extrême $\lim_{\epsilon \to 0} \bar{M}(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon)$; c'est un écoulement rectiligne.

L'état du gaz au point $\mathbf{x}$ étant différent de celui de l'équilibre chimique, l'on a

$$\sum_i A_i L_i > d_i > 0$$

et le signe de l'expression (II.25) est déterminé par la première somme qui prend, pour $\varepsilon \ll 1$, de grandes valeurs négatives. L'inégalité

$$\bar{\mathbf{v}} \bar{\nabla} \bar{\mathcal{Q}}^2 < 0 \tag{II.27}$$

n'entraîne pas nécessairement les inégalités

$$\overline{\mathbf{v}}\ \overline{\nabla}\,|\xi_i - \xi_i^*| < 0 \qquad\qquad i = 1 \ldots N$$

mais, pour ε petit, la décroissance rapide de $\mathcal{D}^2$ ne peut s'arrêter que lorsque sont satisfaites des inégalités du type

$$|\overline{A}_i\ \overline{L}_i| \leqslant |h_i(\varepsilon)| \qquad\qquad \lim_{\epsilon \to 0} h_i(\varepsilon) = 0. \tag{II.28}$$

La continuité des fonctions A_i, L_i implique alors l'existence de fonctions $g_i(\varepsilon)$ telles que

$$|\xi_i - \xi_i^*| \leqslant |g_i(\varepsilon)| \qquad\qquad \lim_{\epsilon \to 0} g_i(\varepsilon) = 0. \tag{II.29}$$

La démonstration est ainsi terminée. Les développements sont typiques pour les problèmes de ce genre, la difficulté consiste à trouver une représentation convenable de la "distance". La forme couramment utilisée mais qui ne peut s'appliquer au problème traité ici, est (dans les variables de ce paragraphe)

$$\mathcal{D}^2 = \sum_{i=1}^{N} (\xi_i - \xi_i^*)^2 . \tag{II.30}$$

En effet, la dérivée particulaire de l'expression (II.30) ne possède pas les propriétés de l'expression (II.25) qui rendent possible la démonstration.

Pour étudier plus en détail le voisinage de l'équilibre chimique vers lequel évolue la composition chimique du gaz, nous abandonnons les variables $P, \mathcal{J}, H$ et nous utilisons, pour les fonctions A_i, L_i, les expressions (II.11, II.12). L'état du fluide au point $\mathbf{x}$ étant celui de l'équilibre chimique, l'on a $\mathbf{v}\,\nabla s_\infty(\mathbf{x}) = 0$; au voisinage de l'équilibre, une relation du type

$$\mathbf{v}\,\nabla s_\infty(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(\mathbf{x})\,(\xi_i - \xi_i^*)\,\nabla\nu \tag{II.31}$$

est donc valable. Nous représentons les degrés d'avancement sur les axes d'un système de coordonnées cartésiennes (ξ). Au voisinage de l'équilibre chimique, la relation (II.24) devient

$$\mathbf{v}\,\nabla\mathcal{D}^2 = \sum_{i,j,k} a_{ji}\ l_{jk}\,(\xi_i - \xi_i^*)\,(\xi_k - \xi_k^*) + \sum_i \sigma_i\,(\xi_i - \xi_i^*)\,\nabla\nu \tag{II.32}$$

l'équation $\mathbf{v}\,\nabla\mathcal{D}^2 = 0$ représente, dans le système de coordonnées (ξ) l'équation d'un ellipsoïde $\mathcal{E}(\mathbf{x})$ dont le plus grand des axes est $0(\varepsilon^\beta)$. A chaque point d'une ligne de courant C correspond un ellipsoïde $\mathcal{E}$; ces ellipsoïdes forment une famille et soit $\mathcal{F}(C)$ la surface (en forme de tube dont le "diamètre" est $0(\varepsilon^\beta)$) qui est leur enveloppe. Soit $l(C)$ la courbe qui, dans l'espace (ξ) correspond à la ligne de courant C. Nous pouvons donc affirmer que, pour $\varepsilon \ll 1$, la courbe $l(C)$ évolue vers un voisinage de la surface $\mathcal{F}(C)$.

La distance à l'équilibre possède des propriétés intéressantes que nous voulons mettre en évidence. Nous supposons que l'enthalpie spécifique totale H est la même sur toutes les lignes de courant; l'état thermodynamique du gaz peut alors être représenté à l'aide des variables $P, \mathcal{J}, \xi_1 \ldots \xi_N$. Exprimée en ces variables, et avec des notations qui sont claires, l'entropie spécifique possède la propriété évidente :

$$\left(\frac{\partial s\,(P, \mathcal{J}, \xi_1 \ldots \xi_N)}{\partial \xi_i}\right)_{P,\ \mathcal{J},\ \xi_k\ (k \neq i)} = A_i\,(P, \mathcal{J}, \xi_1 \ldots \xi_N) \tag{II.33}$$

A l'équilibre chimique, les équations

$$A_i (P, \mathcal{J}, \xi_1 \dots \xi_N) = 0 \qquad i = 1 \dots N$$

sont satisfaites simultanément et l'on admet que leur solution qui correspond à un maximum de l'entropie spécifique

$$\xi_i = \xi_i^* \qquad \xi_i^* = \psi_i (P, \mathcal{J}) \qquad i = 1 \dots N$$

est unique.

La "distance" à l'équilibre, en un point où les paramètres de l'écoulement sont $P, \mathcal{J}, \xi_1 \dots \xi_N$ est donnée par l'intégrale

$$\mathcal{D}^2 = \int_{\xi_{i0} = \xi_i}^{\xi_{i0} = \xi_i^*} \sum A_i (P, \mathcal{J}, \xi_{i0}) \, L_i (P, \mathcal{J}, \xi_{i0}) \, d\xi_{i0} . \tag{II.34}$$

Le contour d'intégration est, en principe, défini par la solution du système (II.19) mais les relations (II.33) montrent que la valeur de l'intégrale ne dépend pas du contour choisi. On a donc la représentation suivante

$$\mathcal{D}^2 = s[P, \mathcal{J}, \psi (P, \mathcal{J})] - s(P, \mathcal{J}, \xi) \tag{II.35}$$

et au voisinage du maximum de l'entropie, la "distance" à l'équilibre se met sous la forme

$$\mathcal{D}^2 = \frac{1}{4} \sum_{i,k} \alpha_{ik} (\xi_i - \xi_i^*) (\xi_k - \xi_k^*).$$

Avec la même précision, l'on déduit, après dérivation ($\varepsilon \ll 1$)

$$\begin{aligned} v \nabla \mathcal{D}^2 = & -\frac{1}{2} \sum \alpha_{ik} \lambda_{ij} (\xi_i - \xi_j^*) (\xi_k - \xi_k^*) \\ & -\frac{1}{2} \rho v^2 \alpha_{ik} \left[v \frac{\partial \psi_i}{\partial P} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathcal{J}} \right] (\xi_k - \xi_k^*) \nabla \nu \end{aligned} \tag{II.36}$$

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ik} (P, \mathcal{J}) \qquad \lambda_{ik} = \lambda_{ik} (P, \mathcal{J}).$$

Une justification de la relation (II.32) précédemment utilisée est ainsi obtenue.

II.3. - ÉQUIVALENCE ENTRE LES EFFETS DES RÉACTIONS CHIMIQUES RAPIDES ET CEUX D'UNE VISCOSITÉ DE VOLUME. DÉFINITION D'UN OPÉRATEUR DE VISCOSITÉ DE VOLUME.

La liaison étroite entre la viscosité de volume d'un gaz et les collisions inélastiques entre les molécules qui le composent est bien connue. Plusieurs auteurs ont déduit une expression du coefficient de viscosité de volume dans le cas des collisions qui conduisent à une excitation des degrés de liberté internes des molécules et pour des situations caractérisées par un transfert facile de l'énergie entre les degrés de liberté de translation et les degrés de liberté internes. Une déduction phénoménologique de l'expression du coefficient de viscosité de volume dans le cas de la propagation des ondes acoustiques dans un gaz qui est le siège

de réactions chimiques arbitraires est due à MANDELSTAM et LEONTOVICH [76]. La valeur du coefficient de viscosité de volume tend vers une constante lorsque la fréquence des ondes est petite; aux fréquences élevées, la viscosité de volume décroît comme l'inverse de la fréquence. Plus récemment, NAPOLITANO [25] a donné une démonstration de la possibilité d'exprimer les effets chimiques à l'aide d'une viscosité de volume, dans le cas d'un écoulement avec réactions rapides, voisin d'un courant homogène. Cette situation est, en fait, équivalente à celle qui se présente dans un problème de propagation d'ondes de faible fréquence, lorsque le coefficient de viscosité de volume est une constante.

Nous reprenons d'abord, par une méthode différente, le cas traité par NAPOLITANO. Nous considérons donc un écoulement qui s'écarte faiblement d'un courant homogène en équilibre chimique, dont les paramètres sont p_o, ρ_o, s_o, v_o ... Les perturbations sont notées par $\rho', \mathbf{v}'$ .... Les équations du mouvement sont

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v}_o \nabla \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho_o} \nabla p' \\
&\mathbf{v}_o \nabla \rho' = -\rho_o \nabla \mathbf{v}' \\
&\mathbf{v}_o \nabla \xi_i = -l_{io} (\xi_i - \xi_i^*) \\
&s' = 0 \\
&p' = p^{*\prime} + \sum_i f_{io} (\xi_i - \xi_i^*)
\end{aligned}
\qquad \text{(II.37)}
$$

Une représentation des degrés d'avancement qui rend diagonale la matrice l_{ik} a été choisie et l'on a noté

$$
p^* = F[\rho, s, \varphi(\rho, s)] \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\right)_{\xi = \varphi(\rho, s)} = f_i
$$

Nous supposons aussi que le système (II.37) assorti de ses conditions aux limites possède pour tout ensemble de valeurs $\{l_{io}\}$ une solution unique, continue et dérivable.

La dernière des équations (II.37) met en évidence l'influence du déséquilibre chimique sur la pression. L'équation de cinétique chimique s'écrit successivement

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v}_o \nabla (\xi_i - \xi_i^*) + l_i (\xi_i - \xi_i^*) = -\mathbf{v}_o \nabla \xi_i^* \\
&= -\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho}\right)_o \mathbf{v}_o \nabla \rho' = \rho_o \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho}\right)_o \nabla \mathbf{v}'.
\end{aligned}
$$

Une solution formelle de cette équation est donnée par l'expression suivante

$$
\xi_i - \xi_i^* = \left(\frac{\rho_o}{v_o} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho}\right)_o \int_{x_l(y,z)}^{x} \exp\left[-\frac{l_{io}}{v_o} (x - x_o)\right] \nabla \mathbf{v}' (x_1, y, z)\, dx_1 \qquad \text{(II.38)}
$$

Ici, la vitesse est parallèle à l'axe des abscisses et orientée dans le sens positif de celle-ci: $x = x_l(y, z)$ est l'équation de la surface caractéristique qui délimite la zone perturbée de l'écoulement. L'utilisation de l'expression (II.38) pour les degrés d'avancement permet d'écrire

l'équation de la quantité de mouvement sous la forme

$$\text{(II.39)} \qquad \mathbf{v}_o \nabla \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho_o} \nabla \left(p' - \frac{\rho_o}{v_o} \sum_{i=1}^{N} f_{i\,o} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} \right)_o \int_{x_l(y,z)}^{x} \exp \left[-\frac{l_{i\,o}}{v_o} (x - x_1) \right] \nabla \mathbf{v}' (x_1, y, z)\, dx_1 \right)$$

qui rappelle la forme de Navier-Stokes, avec un opérateur de viscosité de volume défini par l'égalité

$$\text{(II,40)} \qquad (\lambda \nabla \mathbf{v}') = \frac{\rho_o}{v_o} \sum_{i=1}^{N} f_{i\,o} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} \right)_o \int_{x_l(y,z)}^{x} \exp \left[-\frac{l_{i\,o}}{v_o} (x - x_1) \right] \nabla \mathbf{v}' (x_1, y, z)\, dx_1$$

Il est donc bien mis en évidence que pour ce qui est de ces coefficients dissipatifs, un gaz qui est le siège de réactions chimiques est un milieu à mémoire ; il n'est pas possible en général de définir un coefficient de viscosité de volume qui soit un scalaire. En traitant un problème linéarisé, on a donc le choix entre l'utilisation du système (II.37) et l'utilisation du système équivalent

$$\text{(II.41)} \qquad \begin{aligned} &\mathbf{v}_o \nabla \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho_o} \nabla \left[p^{*\prime} - (\lambda \nabla \mathbf{v}') \right] \\ &\mathbf{v}_o \nabla \rho' = -\rho_o \nabla \mathbf{v}' \\ &s' = 0 \\ &p^* = F \left[\rho, s, \varphi(\rho, s) \right] \end{aligned}$$

dont le nombre d'équations est réduit de N et qui englobe déjà une partie des conditions aux limites, celles relatives aux degrés d'avancement. Une redéfinition de la pression a été nécessaire, mais ce fait n'est pas spécialement important car un certain arbitraire reste toujours attaché à la définition des fonctions thermodynamiques d'un milieu en dehors de l'équilibre.

Le raisonnement simple que nous venons de présenter est susceptible d'une généralisation que nous donnons dans le théorème suivant :

THÉORÈME - L'effet des réactions chimiques rapides sur un écoulement s'exprime à l'aide d'un coefficient de viscosité de volume si l'on modifie convenablement les conditions aux limites.

La limitation aux réactions rapides est nécessaire dans le cas des écoulements dont la vitesse varie assez notablement car les paramètres chimiques, même s'ils se trouvaient au voisinage de l'équilibre sur une certaine surface, ne le restent pas nécessairement dans toute la masse du fluide. Une exception, toutefois, est faite pour le cas des réactions rapides ; nous avons en effet montré que dans ce cas la composition chimique tend à s'établir au voisinage de celle de l'équilibre chimique local.

Nous nous proposons de déterminer l'influence des réactions chimiques sur l'écoulement, avec une précision qui ne dépasse pas l'ordre le plus bas possible en ε. Nous ne retenons donc que les réactions chimiques les plus lentes, pour ces réactions $\beta_i = \beta$ où $i = 1 \ldots N_1$ $\beta = \inf \beta_j \quad j = 1 \ldots N$. Les réactions plus rapides sont supposées en équilibre chimique et il n'est pas nécessaire de les mentionner.

Les équations du mouvement peuvent être écrites sous la forme suivante, valable dans la

région de quasi-équilibre

$$\bar{\mathbf{v}}\,\bar{\nabla}\,\bar{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\bar{\nabla}\left[\bar{p}^* + \sum_{i=1}^{N_1} f_i\,(\xi_i - \xi_i^*)\right]$$

$$\bar{\nabla}\,\bar{\rho}\,\mathbf{v} = 0$$

(II.42)

$$\varepsilon^{-\beta}\,\bar{\mathbf{v}}\,\bar{\nabla}\,\xi_i = -\,\bar{l}_i\,(\xi_i - \xi_i^*)$$

$$\varepsilon^{-\beta}\,\bar{\mathbf{v}}\,\bar{\nabla}\,\bar{s} = \sum_{i,k=1}^{N_1} \bar{a}_{ik}\,\bar{l}_i\,(\xi_i - \xi_i^*)(\xi_k - \xi_k^*)$$

$$p^* = F\,[\rho, s, \varphi(\rho, s)]\,.$$

Nous admettons que ces équations, assorties de conditions aux limites qui seront précisées par la suite, possèdent, pour tout ensemble de fonctions a_{ik} , l_i , F acceptables physiquement, une solution continue et dérivable en dehors des chocs.

Soit σ une abscisse curviligne, mesurée le long des lignes de courant. Les équations de cinétique chimique possèdent la solution formelle suivante

(II.43)
$$\xi_i - \xi_i^* = (\xi_i - \xi_i^*)_{\sigma=0} \exp\left(\varepsilon^{-\beta}\int_0^{\bar{\sigma}} \frac{\bar{l}_i}{\bar{v}}\,d\bar{\sigma}'\right) - \int_0^{\bar{\sigma}} \frac{\bar{\mathbf{v}}\,\bar{\nabla}\,\xi_i^*}{\bar{v}} \exp\left(\varepsilon^{-\beta}\int_{\bar{\sigma}'}^{\bar{\sigma}} \frac{\bar{l}_i}{\bar{v}}\,d\bar{\sigma}''\right) d\bar{\sigma}'\,.$$

Le système d'équations (II.42) n'est valable que dans un domaine défini par $\bar{\sigma} \gg \varepsilon$ et avec une précision qui ne dépasse pas $0\,(\varepsilon^{\beta})$. Nous voulons donc évaluer les expressions (II.43) dans les mêmes conditions.

Soit

$$\inf \frac{\bar{l}_i}{\bar{v}} = \partial \qquad i = 1 \ldots\ldots N_1 \qquad \partial > 0$$

on a

$$\exp\left(-\,\varepsilon^{-\beta}\int_0^{\bar{\sigma}} \frac{\bar{l}_i}{\bar{v}}\,d\bar{\sigma}'\right) < \exp\left(-\frac{\partial\bar{\sigma}}{\varepsilon^{\beta}}\right) \qquad i = 1 \ldots N_1$$

Le premier terme du membre de droite de l'égalité (II.43) est donc, pour $\sigma \gg \varepsilon$ exponentiellement petit. Un développement asymptotique en puissances de ε du second terme donne

(II.44)
$$\int_0^{\bar{\sigma}} \frac{\bar{\mathbf{v}}\,\bar{\nabla}\,\xi_i^*}{\bar{v}} \exp\left(-\,\varepsilon^{-\beta}\int_{\bar{\sigma}'}^{\bar{\sigma}} \frac{\bar{l}_i}{\bar{v}}\,d\bar{\sigma}''\right) d\bar{\sigma}' = \varepsilon^{\beta}\,\frac{\bar{\mathbf{v}}\,\bar{\nabla}\,\xi_i^*}{\bar{l}_i} + 0\,(\varepsilon^{\beta})$$

$$= -\,\varepsilon^{\beta}\,\frac{\bar{\rho}\,\bar{\nabla}\,\bar{\mathbf{v}}}{\bar{l}_i}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\bar{\rho}}\right)_{\bar{s}} + 0\,(\varepsilon^{\beta})\,.$$

De nouveau, l'équation de la quantité de mouvement montre qu'il est possible de définir un coefficient de viscosité de volume donné par l'expression

(II.45)
$$\lambda = -\,\rho \sum_{i=1}^{N_1} f_i \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho}\right)_s \frac{1}{l_i}$$

Cette expression est valable avec la précision envisagée, qui est $o(\varepsilon^{\beta})$. Le coefficient de viscosité de volume est obtenu sous la forme d'un scalaire qui ne dépend que de l'état thermodynamique du fluide au point considéré. La théorie de la propagation du son à basse fréquence fournit pour le coefficient de viscosité de volume une expression identique à l'expression (II.45), qui est la limite vers laquelle tend l'opérateur (II.40) pour $\varepsilon \ll 1$.

Le système d'équations (II.42) peut donc être remplacé pour $\bar{\sigma} \gg \varepsilon^{\beta}$ et avec une précision $o(\varepsilon^{\beta})$, par le système équivalent

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v}\,\nabla\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla\,(p^* - \lambda\,\nabla\,\mathbf{v}) \\
&\nabla\,\rho\,\mathbf{v} = 0 \\
&\rho\,T^*\,\mathbf{v}\,\nabla\,s = \lambda\,(\nabla\,\mathbf{v})^2
\end{aligned}
\qquad \text{(II.46)}
$$

où p^*, T^* sont des fonctions connues des variables thermodynamiques indépendantes ρ et s. Le système (II.46) possède une intégrale analogue à l'intégrale de Bernoulli. En effet, l'identité thermodynamique s'écrit :

$$dh^* - \frac{dp^*}{\rho} - T^*\,ds = 0.$$

Des transformations élémentaires donnent :

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{v}\,\nabla\,v^2 = -\frac{\mathbf{v}}{\rho}\,\nabla\,(p^* - \lambda\,\nabla\,\mathbf{v}) = -\,\mathbf{v}\,\nabla\,h^* + T^*\,\mathbf{v}\,\nabla\,s$$

$$+\frac{1}{p}\,\mathbf{v}\,\nabla\,(\lambda\,\nabla\,\mathbf{v}) = -\,\mathbf{v}\,\nabla\,h^* + \mathbf{v}\nabla\left(\frac{\lambda}{\rho}\,\nabla\,\mathbf{v}\right)$$

Cette relation conduit à l'intégrale

$$\frac{v^2}{2} + h^* - \frac{\lambda}{\rho}\,\nabla\,\mathbf{v} = H \qquad \text{(II.47)}$$

où H est une constante sur chaque ligne de courant; nous montrerons dans le paragraphe suivant que H est l'enthalpie totale du gaz. La comparaison de la relation (II.45) avec la forme usuelle de l'équation de Bernoulli montre que dans un écoulement avec réactions chimiques rapides

$$h - h^* = \frac{p - p^*}{\rho} + o(\varepsilon^{\beta}) \qquad \text{(II.48)}$$

la relation suivante est également valable

$$\sum_{i=1}^{N_1} A_i\,L_i = \frac{(p - p^*)^2}{\rho\,T^*\,\lambda} + o(\varepsilon^{2\beta}) \qquad \text{(II.49)}$$

La correspondance est ainsi établie entre le problème de l'écoulement d'un gaz qui est le siège de réactions chimiques rapides avec celui beaucoup plus classique de l'écoulement d'un gaz visqueux.

II.4. - CONDITIONS DE CHOC.

Nous venons de démontrer que le système d'équations (II.44), dorénavant appelé système réduit, contient, dans l'approximation considérée, qui est $0(\varepsilon^{\beta})$, des termes qui sont numériquement égaux aux termes correspondants du système complet (II.4 - II.8). Les structures

mathématiques de ces deux systèmes sont pourtant complètement différentes l'une de l'autre et le système réduit contient un nombre plus petit d'équations que le système complet. Evidemment les domaines de validité de ces deux systèmes ne sont pas les mêmes et déjà avec la précision $0(\varepsilon^3)$ le système réduit est inapplicable à l'intérieur des couches limites de relaxation car il est impossible de lui imposer des valeurs initiales pour les degrés d'avancement des réactions.

Pour pouvoir résoudre complètement un problème à l'aide du système réduit, il est nécessaire de prolonger formellement ses solutions à l'intérieur des couches de relaxation. On se trouve alors en face du problème suivant : quelles sont les conditions aux limites qu'il faut imposer aux équations du système réduit pour obtenir, à l'extérieur des couches de relaxation, une solution identique à celle fournie par le système complet, aux termes en ε^β près. Sur les parois des corps, la condition de glissement se traduit aussi bien dans un système que dans l'autre par l'annulation de la composante normale de la vitesse. Il n'en est pas de même sur les surfaces des ondes de choc qui portent, pour le système complet, des conditions initiales pour les degrés d'avancement.

Le problème envisagé est à perturbations singulières et la méthode qu'il convient d'appliquer est celle du raccordement des développements asymptotiques intérieurs et extérieurs. Cette méthode a été utilisée par GERMAIN et GUIRAUD [74] pour déterminer l'influence d'une onde de choc, dont la structure est décrite par les équations de Navier-Stokes, sur un écoulement de fluide visqueux. Dans le problème que nous envisageons, on utilise un système de coordonnées curvilignes x, y, z tel que $z = 0$ soit l'équation de l'onde de choc visqueuse dont l'épaisseur est supposée nulle. La zone de relaxation a une épaisseur de l'ordre de ε^β, il convient donc de décrire la structure de cette zone en utilisant le système complet et les variables adaptées sont $(x, y, \hat{z} = z/\varepsilon^\beta)$. Par contre, les dimensions de la région de quasi-équilibre étant de l'ordre de l'unité, il est possible d'utiliser le système réduit avec les variables (x, y, z).

Soit donc :

$$\hat{M} = \hat{M}(x, y, \hat{z}, \varepsilon)$$

une représentation de la solution du système complet valable au voisinage du choc ; nous admettons que le vecteur $\hat{M}$ peut s'écrire

$$\hat{M} = \hat{M}_0 + o(1) \tag{II.50}$$

où

$$\hat{M}_0 = \hat{M}(x, y, \hat{z}, 0)$$

La solution du système réduit est

$$\check{M} = \check{M}(x, y, z, \varepsilon)$$

et nous admettons la propriété suivante

$$\check{M} = \check{M}_0 + \varepsilon^\beta \check{M}_1 + o(\varepsilon^\beta) \tag{II.51}$$

Les vecteurs $\hat{M}$ et $\check{M}$ ne possèdent, évidemment, pas le même nombre de composantes.

Déterminons d'abord le nombre de conditions aux limites qui sont nécessaires pour le système réduit. Les grandeurs qui y figurent sont les trois composantes de la vitesse et deux paramètres thermodynamiques. Quant à la structure du système réduit, elle n'est guère différente de la structure des équations d'Euler, car l'on peut poser

$$\lambda \nabla \mathbf{v} = \lambda_0 \nabla \mathbf{v}_0 + o(\varepsilon^\beta).$$

Ce terme est connu d'avance, puisqu'il est déterminé par la solution décrivant l'écoulement d'un fluide parfait en équilibre chimique. Finalement, c'est donc cinq relations indépendantes

qu'il faudra satisfaire sur l'onde de choc, ce qui revient à se donner le vecteur vitesse et les valeurs de deux paramètres thermodynamiques sur la face aval du choc.

Le problème de l'écoulement avec réactions chimiques rapides a déjà été traité par LENARD [54] qui a utilisé un raccordement direct des développements asymptotiques intérieur et extérieur. L'inconvénient de la méthode utilisée par cet auteur est qu'elle nécessite la reprise des calculs pour chaque problème particulier. La variante que nous choisissons consiste justement à déduire des conditions aux limites pour le système réduit qui acquiert ainsi une validité générale.

La méthode de GERMAIN et GUIRAUD permet d'obtenir des conditions de choc valables à tout ordre en ε. Il est alors nécessaire de supposer que les fonctions qui interviennent appartiennent à une certaine classe de fonctions, la classe *N.S.* Cette méthode ne sera utilisée ici que pour l'obtention des termes de l'ordre le moins élevé en ce paramètre, la réalisation des hypothèses exprimées par les relations II.50-51) suffit pour ce but plus restreint. Appliquée à la situation qui fait l'objet de ce paragraphe, la méthode peut se résumer brièvement comme suit. Les équations complètes du mouvement sont écrites sous forme intégrale

$$\text{(II.52)} \qquad \begin{aligned} &\int_S \rho\, \mathbf{v}\, N\, dS = 0 \\ &\int_S (p\,\Pi + \rho\, \mathbf{v}\mathbf{v})\, N\, dS = 0 \\ &\int_S (h + v^2/2)\, \rho\, \mathbf{v}\, N\, dS = 0 \\ &\int_S (\rho\, \mathbf{v}\, \xi_i - \mathbf{L}_i)\, N\, dS = 0 \qquad\qquad i = 1 \ldots N \end{aligned}$$

où Π est le tenseur unitaire et

$$\nabla L_i = \rho \mathbf{L}_i .$$

Le système réduit s'écrit sous une forme similaire, avec la substitution

$$\text{(II.53)} \qquad p \to p^* - \lambda_0\, \nabla \mathbf{v}_0 \qquad\qquad h \to h^* - \frac{\lambda_0}{\rho_0}\, \nabla \mathbf{v}_0 .$$

Les dernières N équations du système (II.52) sont naturellement absentes.

On choisit une surface de contrôle sous la forme d'un petit cylindre d'axe normal à l'onde de choc (fig. 1); les bases du cylindre sont situées à une distance du choc suffisante pour que l'écoulement y soit déjà convenablement décrit par le système réduit. Pour fixer les idées, la section médiane du cylindre est située sur l'onde de choc; ceci n'est pourtant pas obligatoire et l'on peut écrire les conditions de choc sur tout autre surface intérieure à la zone de relaxation. Soit A une quantité quelconque; on note

$$\{A\} = A(+\delta) - A(-\delta) \qquad \{A\} = A(\pm\delta) - A(+0)$$

$$[A] = A(+0) - A(-0).$$

Toutes les équations (II.52) se mettent sous la forme

$$\int_{S_0} \{A\}\, N\, dS + \int_\Gamma d\sigma\, N \int_{-\delta}^{+\delta} b\, dz$$

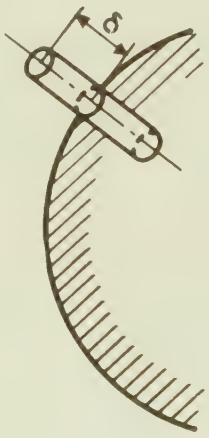


Fig. 1

où S_0 est la surface et Γ le contour de la section médiane. Par hypothèse, les dimensions du

cylindre ont été choisies d'une manière qui permet la substitution

$$\{A\} = \{\check{A}\} + o(\varepsilon^{\beta}).$$

Le système réduit fournit des relations de la forme suivante

$$\{A\}_{\pm} + \frac{1}{S_o} \int_{\Gamma} d\sigma\, N \int_{o}^{\pm\delta} b\, dz.$$

L'identité évidente

$$[A] = \{A\} + \{A\}_{-} - \{A\}_{+}$$

permet de transformer les relations de choc qui deviennent

$$[\check{A}] + \lim_{S_o \to 0} \int_{\Gamma} \widetilde{b}\, N\, d\sigma = o(\varepsilon^{\beta}) \tag{II.54}$$

où la notation

$$\widetilde{b} = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{b} - \check{b})\, dz \tag{II.55}$$

a été utilisée.

Compte tenu des hypothèses faites, la relation (II.55) devient

$$\widetilde{\overline{b}} = \varepsilon^{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\overline{b}}(\overline{x}, \overline{y}, \hat{\overline{z}}, 0) - \check{\overline{b}}(x, y, 0, 0)]\, d\hat{\overline{z}} + o(\varepsilon^{\beta}). \tag{II.56}$$

Pour la convergence de ces deux intégrales, l'égalité suivante est nécessaire

$$\lim_{\hat{\overline{z}} \to \pm\infty} \hat{b}_o = \lim_{z \to \pm 0} \check{b}_o$$

L'égalité de ces deux limites est assurée par le fait que les systèmes réduit et complet sont identiques pour $\varepsilon = 0$.

La signification des quantités $\hat{A}_o$ peut être dégagée en écrivant les équations du mouvement à l'aide des variables $x, y, \hat{z}$ et en effectuant ensuite le passage à la limite pour $\varepsilon = 0$. Les équations qui déterminent les quantités $\hat{A}_o$ s'obtiennent sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\hat{\overline{z}}} (\hat{\overline{p}} + \hat{\overline{\rho}}\, \hat{\overline{v}}\,) = 0 \\
&\frac{d}{d\hat{z}} (\hat{\overline{\rho}}\, \hat{\overline{v}}_z) = 0 \\
&\frac{d}{d\hat{\overline{z}}} \left(\hat{\overline{h}} + \frac{\hat{\overline{v}}_z^{\,2}}{2} \right) = 0 \\
&\hat{\overline{V}}_z \frac{d\hat{\xi}_i}{d\hat{z}} = \hat{\overline{L}}_i \qquad\qquad i = 1 \ldots N_1 \\
&L_i = 0 \qquad\qquad i = N_1 + 1 \ldots N
\end{aligned} \tag{II.57}$$

Les équations ci-dessus décrivent la structure de la zone chimique de relaxation d'un choc droit. L'étude de la structure des zones de relaxation a fait l'objet de nombreux travaux et l'on dispose de résultats numériques pour un nombre de cas assez variés.

La relation (II.52) permet d'expliciter les conditions de choc, mais il est plus intéressant d'utiliser l'analogie formelle du problème que nous envisageons avec celui traité dans le mémoire [74]. On utilise à cet effet un système de coordonnées curvilignes orthogonales x_1, x_2, x_3, dont les axes x_1, x_2 sont dirigés suivant les lignes de courbure de la surface du choc. Les coefficients de la première forme quadratique de cette surface sont H_1, H_2, les courbures principales sont respectivement K_1 et K_2. On désigne par u_1, u_2, w les trois composantes de la vitesse, par u_{10}, u_{20} les composantes tangentielles dans l'écoulement avec $\varepsilon = 0$; ces composantes sont continues à travers le choc. Les conditions de choc recherchées s'obtiennent à partir des conditions présentées dans le mémoire [74] en annulant, dans les formules de ce mémoire, les deux coefficients de viscosité et en effectuant les substitutions indiquées par les relations (II.5). Voici la forme que prennent alors les conditions de choc

$$[\rho w] = -\frac{1}{H_1 H_2}\left[(u_{10} H_2 \widetilde{\rho})_{,1} + (u_{20} H_1 \widetilde{\rho})_{,2}\right] \tag{1}$$

$$[\rho w u_1] = -\frac{1}{H_1}\widetilde{\rho}_{,1} - \frac{1}{H_1 H_2}\left[(H_2 u_{10}^2 \widetilde{\rho})_{,1} + (u_{10} u_{20} H_1 \widetilde{\rho})_{,2} + (u_{10} u_{20} H_{1,2} - u_{20}^2 H_{2,1})\widetilde{\rho}\right] \tag{2a}$$

(II.58)

$$[p^* - \lambda_o \nabla \mathbf{v}_o + \rho w^2] = \left(\frac{K_1 u_{10}^2}{H_1} + \frac{K_2 u_{20}^2}{H_2}\right)\widetilde{\rho} + \left(\frac{K_1}{H_1} + \frac{K_2}{H_2}\right)\widetilde{p} \tag{3}$$

$$\left[\rho w\left(h^* - \frac{\lambda_o}{\rho_o}\nabla \mathbf{v}_o + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\right] = -\frac{1}{H_1 H_2}\left[\overbrace{\left(\rho\left(h + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) u_{10} H_2\right)_{,1}} + \overbrace{\left(\rho\left(h + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) u_{20} H_1\right)_{,2}}\right] \tag{4}$$

On obtient également une relation(II.58.2 b) qui se déduit de la relation (II.58.2 a) en permutant les indices 1 et 2. La notation $M_{,i}$ représente la dérivée $\partial M/\partial x_i$.

L'expression $h + \frac{\mathbf{v}^2}{2}$ est une intégrale des équations de la structure de la zone de relaxation, donc

$$\overbrace{\rho\,(h + \mathbf{v}^2/2)} = H\widetilde{\rho}.$$

La comparaison de la formule (II.58.1) avec la formule (II.58.4) montre que cette dernière relation peut être mise sous la forme

(II.58.4')
$$\left[h^* - \frac{\lambda_o}{\rho_o}\nabla \mathbf{v}_o + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right] = 0$$

Les membres de gauche des relations ci-dessus qui sont nuls pour une zone de relaxation considérée comme étant sans épaisseur, sont ici reliés à la structure de la zone de relaxation par l'intermédiaire des quantités $\widetilde{p}, \widetilde{\rho}$ qui sont de l'ordre de ε^β. Avant de résoudre le système (II.58) il convient de noter qu'au lieu d'écrire ces relations sur la surface de choc effective, il

y a avantage à le faire sur la surface caractérisée par la relation

(II.59) $$\widetilde{\rho} = 0$$

car les conditions de choc s'y trouvent considérablement simplifiées. Cette possibilité est illustrée sur la figure 2 ; pour la configuration représentée sur cette figure, on a

(II.60) $$\widetilde{\rho} = \int_0^{\delta} \left(\hat{\rho} - \check{\rho}\,(-0) \right) dz - \int_{\delta}^{\infty} \left(\check{\rho}\,(+0) - \hat{\rho} \right) dz .$$

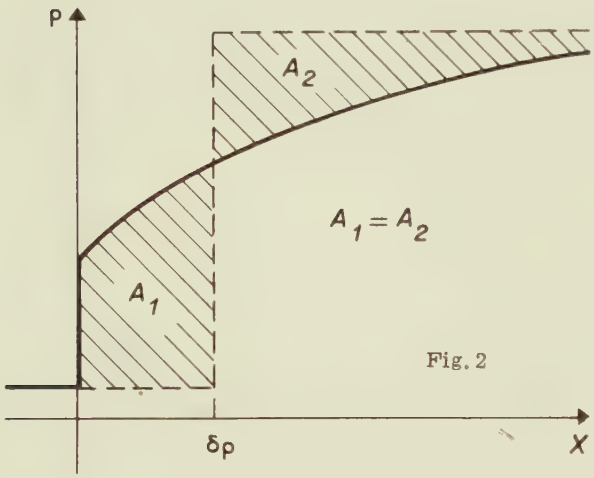


Fig. 2

Les chocs de compression permettent donc de réaliser la condition $\widetilde{\rho} = 0$ pour une certaine distance $\delta\rho$ à l'aval du choc. On a alors

(II.58.1') $$[\rho w] = 0$$

et la relation relative aux composantes tangentielles de la vitesse, notées avec l'indice t, devient

(II.58.2') $$[u_t] = -\frac{1}{\rho w} \nabla_t \widetilde{p}.$$

Nous donnons, dans les figures 3, la variation des quantités $\widetilde{p}, \widetilde{\rho}$ dans le cas de l'écoulement d'un gaz de Lighthill.

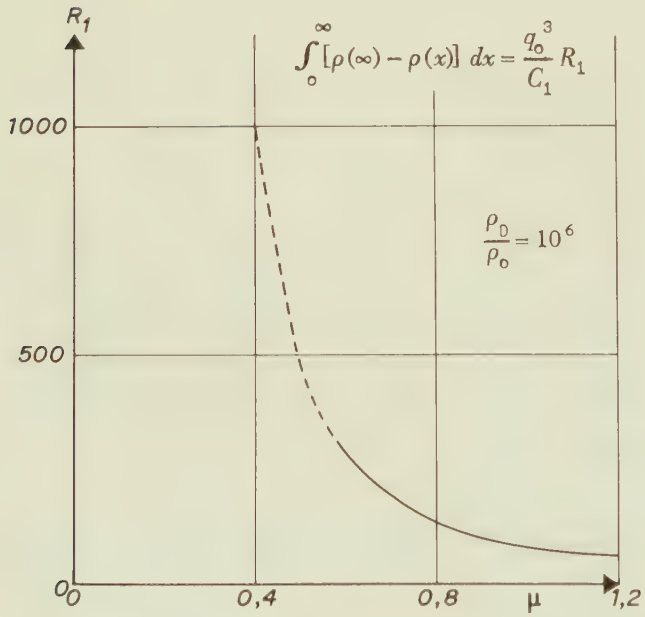


Fig. 3.1 Gaz de LIGHTHILL
Equation de cinétique chimique

$$q \frac{d\alpha}{dx} = K$$

$$K = C_1 \rho T^{-3} \left\{ (1-\alpha) \exp\left(-\frac{q_0^2}{2\mu R T} \right) - \alpha^2 \frac{\rho}{\rho_0} \right\}$$

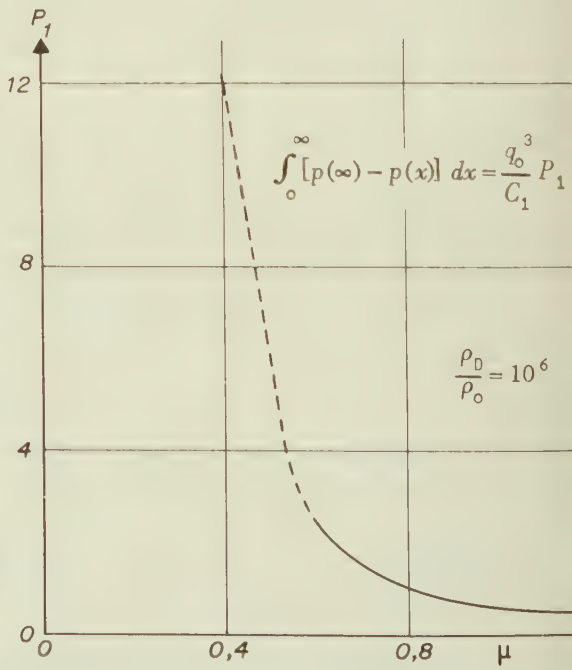


Fig. 3.2

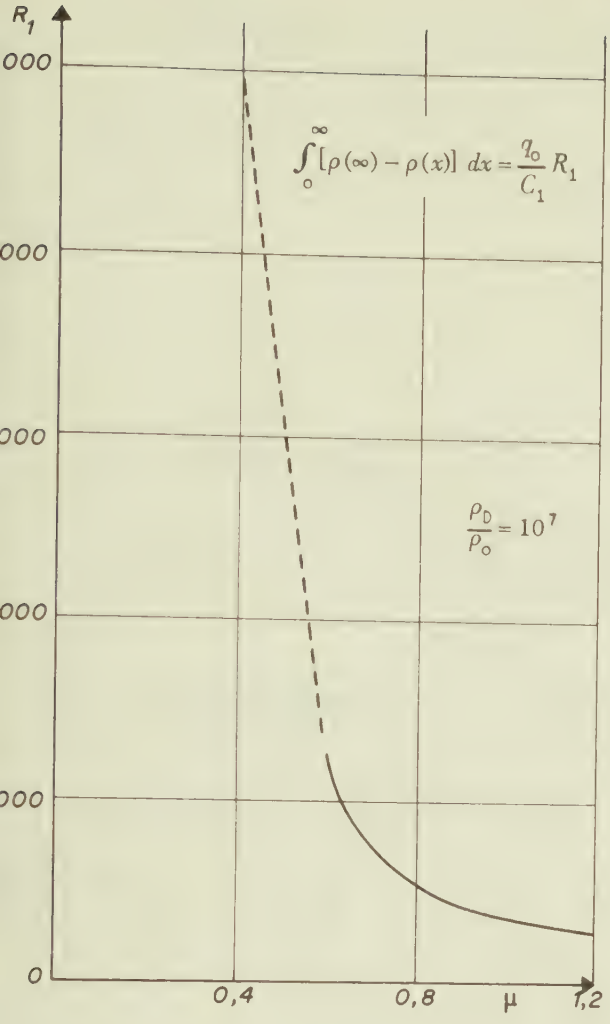

R1
000
000
000
000
000
0
0,4
0,8
μ
1,2
$\int_0^\infty [\rho(\infty) - \rho(x)]\, dx = \frac{q_0}{C_1} R_1$
$\frac{\rho_D}{\rho_0} = 10^7$

Fig. 3.3

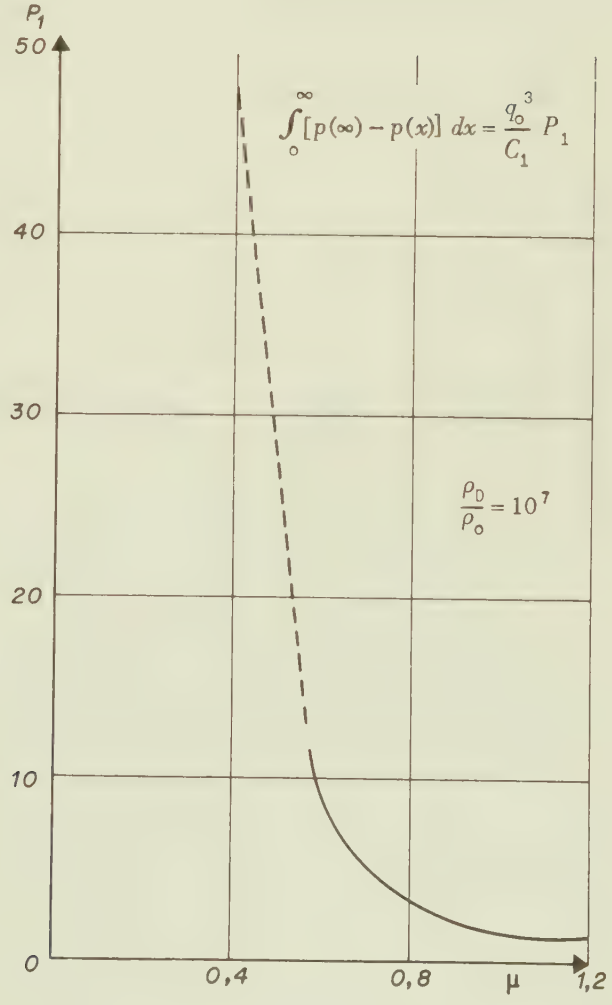

P1
50
40
30
20
10
0
0,4
0,8
μ
1,2
$\int_0^\infty [p(\infty) - p(x)]\, dx = \frac{q_0^3}{C_1} P_1$
$\frac{\rho_D}{\rho_0} = 10^7$

Fig. 3.4

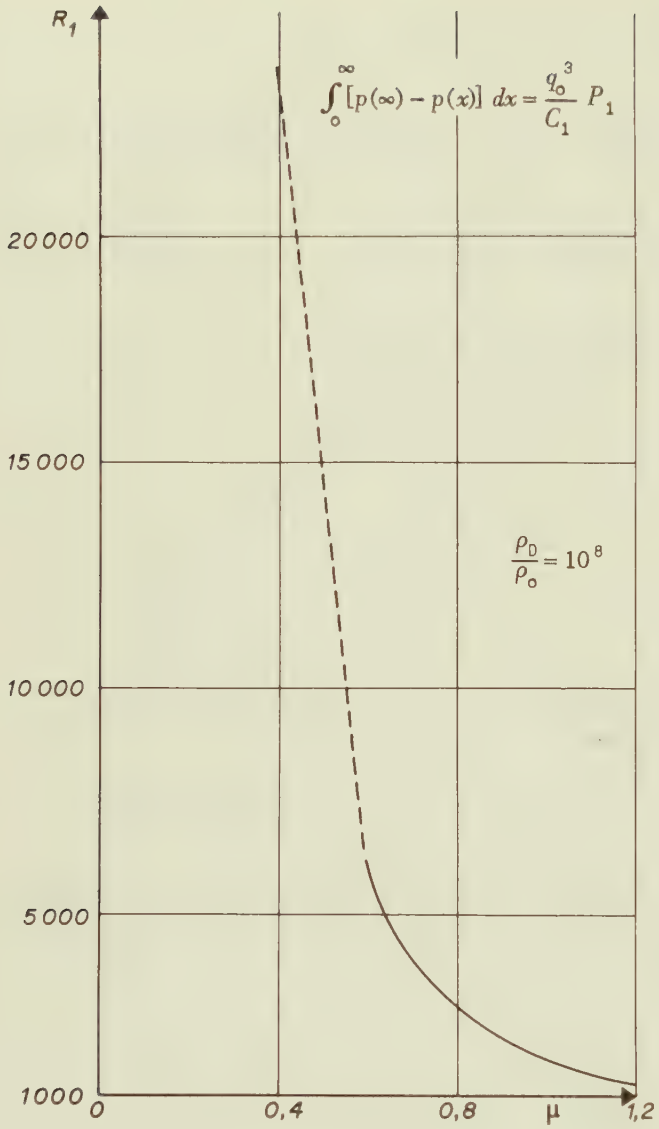
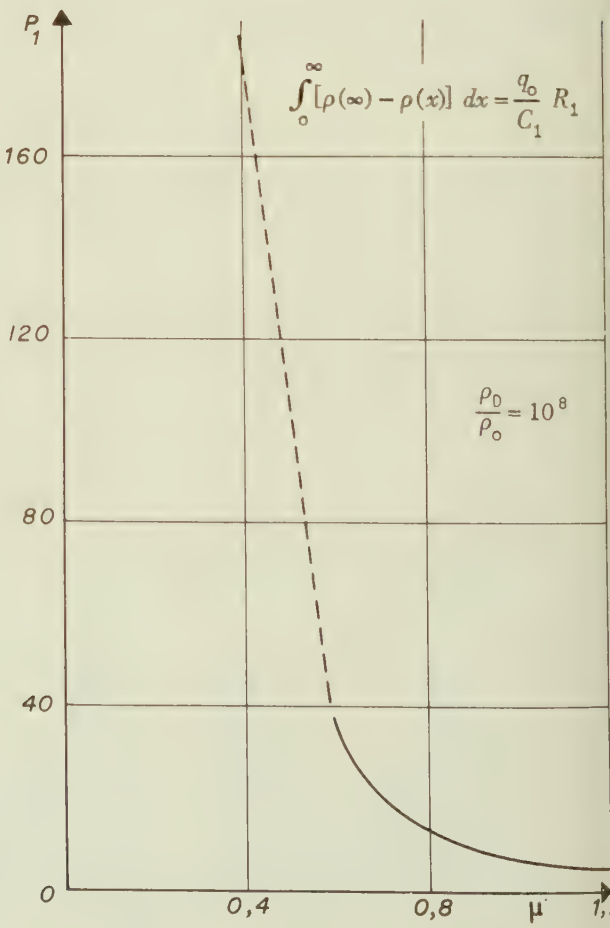

R_1
$\int_0^\infty [p(\infty) - p(x)]\, dx = \frac{q_o^3}{C_1} P_1$
20 000
15 000
10 000
5 000
1000
0
0,4
0,8
μ
1,2
$\frac{\rho_D}{\rho_o} = 10^8$

Fig. 3.5

Fig. 3.6


P_1
$\int_0^\infty [\rho(\infty) - \rho(x)]\, dx = \frac{q_o}{C_1} R_1$
160
120
80
40
0
0,4
0,8
μ
$\frac{\rho_D}{\rho_o} = 10^8$

II.5. - ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS UNIDIMENSIONNELS SUR LA BASE DES TRAVAUX DE VASSILIEVA ET DE WASOW.

L'objet des travaux de ces auteurs a été le comportement pour $\varepsilon \ll 1$ des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires de la forme

$$\Omega(\varepsilon)\frac{dy}{dt} = f(t, y, \varepsilon) \tag{II.61}$$

où

$$y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \qquad \Omega(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les articles de VASSILIEVA portent sur un système un peu moins général, le vecteur f étant indépendant du paramètre ε.

L'analogie entre le système (II.61) et les équations décrivant l'écoulement dans une tuyère d'un gaz qui est le siège d'une seule réaction chimique a été remarquée également par NAPOLITANO. En effet ces dernières équations ont la forme (II.61) si l'on note

$$y_1 = \xi \qquad y_2 = p + \rho v^2 .$$

Les résultats concernant les systèmes de la forme (II.61) sont pourtant susceptibles de s'étendre aux cas où le nombre de composantes du vecteur y est supérieur à 2 : ces cas correspondent à des écoulements avec plusieurs réactions chimiques.

Les deux auteurs cités ont étudié des systèmes dont les solutions tendent, pour $\varepsilon = 0$, vers des solutions du système

$$\Omega_0 \frac{dy^*}{dt} = f^*$$

où

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad f^* = f(t, y^*, 0)$$

Il est supposé également que pour $\varepsilon \sim 0$, y et y^* sont voisines l'une de l'autre. Nous avons démontré au paragraphe 2 de ce chapitre que les équations des écoulements avec réactions chimiques satisfont à ces hypothèses.

Dans la méthode utilisée par VASSILIEVA, une solution formelle du système (II.61) est construite sous la forme de séries et il est montré que ces séries sont des développements asymptotiques. Pour la demonstration, il est nécessaire de supposer que les fonctions f possèdent un certain nombre de dérivées.

Le résultat obtenu par WASOW est plus général, mais il s'obtient au prix de conditions plus restrictives imposées aux fonctions f. L'auteur admet en effet que les fonctions f sont des fonctions holomorphes des arguments dont elles dépendent. Par une série de transformations, qui comprennent des développements asymptotiques en puissance de ε, le système (II.61) est ramené à un système équivalent, régulier pour $\varepsilon \to 0$, auquel les théorèmes sur la dépendance de la solution du paramètre ε peuvent être appliquées.

Nous reproduisons brièvement la solution plus simple de VASSILIEVA, pour son rapport avec les problèmes d'écoulement unidimensionnel. On pose

$$\tau = t/\varepsilon$$

et l'on construit trois solutions formelles des équations (II.61), ayant les formes suivantes

$$y = y_0^{(1)}(\tau) + \varepsilon\, y_1^{(1)}(\tau) + \dots \qquad (1)$$

(II.62)
$$y = y_0^{(2)}(t) + \varepsilon\, y_1^{(2)}(t) + \dots \qquad (2)$$

$$y = y_{00}^{(2)} + \varepsilon\, y_{01}^{(2)} + t\, y_{10}^{(2)} + \dots \qquad (3)$$

Les coefficients de ces séries satisfont aux conditions

$$y_0^{(1)}(0) = y_0 \qquad y_i^{(1)}(0) = 0 \qquad i > 0$$

$$y_k^{(2)}(0) = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty \tau^k \, \frac{d^k}{d\tau^k} f_{k-1}^{2\,(1)} \, d\tau$$

La solution du problème est donnée, avec le degré de précision désiré, par des expressions de la forme

(II.63)
$$Y_n = \left(y_0^{(1)} + \dots + \varepsilon^n\, y_n^{(1)} \right) + \; y_0^{(2)} + \dots + \varepsilon^n\, y_n^{(2)}$$
$$- \left(y_{00}^{(2)} + \dots + \varepsilon^n\, y_{0n}^{(2)} + \dots + t^n\, y_{n0}^{(2)} \right.$$

Les expressions (II.63) donnent une représentation asymptotique de la solution : on a en effet

(II.64)
$$y(t, \varepsilon) = Y_n + R_{n+1}$$

avec

$$|R_{n+1}| < C\, \varepsilon^{n+1} .$$

Les conditions dans lesquelles est valable la majoration (II.64) sont les suivantes :

- le vecteur f possède des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $(n+1)$, continues au voisinage de la courbe $y = y^*(t)$;
- les dérivées partielles de l'ordre i des fonctions f^1, f^2 où $i < n$ pour f^1 et $i < n-1$ pour f^2 sont $n+1$ fois dérivables par rapport à y^1 le long de la courbe $t = 0$, $y^2 = y^{2\,(1)}(0)$, $y^1 = y_0^{1\,(1)}(0)$.

Il est très difficile de vérifier si les conditions ci-dessus sont ou ne sont pas réalisées pour les fonctions f rencontrées dans les problèmes physiques. On admet généralement que ces fonctions possèdent les propriétés de régularité souhaitées. On peut donc dire que les travaux de WASOW et VASSILIEVA donnent une réponse affirmative au problème de la possibilité de la représentation de la solution sous la forme d'une série asymptotique de puissances de ε.

Chapitre III

ÉCOULEMENTS AVEC RÉACTIONS CHIMIQUES RAPIDES. APPLICATIONS.

III.1. - ONDES DE CHOC FAIBLES.

Dans les écoulements de gaz réactifs, les ondes de choc possèdent des propriétés spécifiques que nous rappelons rapidement. L'épaisseur des couches de relaxation visqueuse est généralement négligée, la structure des ondes étant étudiée à l'aide du système

$$\rho v = J$$

$$p + \rho v^2 = P$$

(III.1)

$$h + v^2/2 = H$$

$$v \frac{d\xi_i}{dx} = L_i$$

avec les conditions aux limites

$$\rho(-\infty) = \rho_1 \ldots \xi(+\infty) = \varphi(\rho_1, s_1) \quad ; \quad \rho(+\infty) = \rho_2 \ldots \xi(+\infty) = \varphi(\rho_2, s_2).$$

L'analyse de ce système conduit aux conclusions suivantes

1. $v_1 < a_{e_1}$. La solution banale $\rho = \rho_1 \ldots$ est unique.

2. $a_{e_1} < v_1 < a_{f_1}$. Une solution continue, reliant des états différents (1) et (2) existe. D'après LIGHTHILL, on appelle ce type d'ondes "ondes complètement dispersées".

3. $v_1 > a_{f_1}$. Une solution continue reliant les états (1) et (2) est impossible. Le profil de l'onde débute avec un sous choc visqueux qui n'affecte pas les degrés d'avancement. Les ondes de ce type sont appelées par LIGHTHILL "ondes partiellement dispersées".

L'introduction des phénomènes de transfert efface les frontières entre les groupes. En particulier, des ondes subsoniques qui se propagent avec des vitesses déterminées deviennent possibles dans le cas des réactions exothermiques. Une résolution du système (III.1) autre que numérique est évidemment impossible et l'on dispose, à présent, de nombreuses solutions.

Les ondes de type 2. permettent pourtant une étude plus détaillée. En effet, dans les situations courantes, les deux célérités du son a_{e_1}, a_{f_1} sont très voisines l'une de l'autre

$$a_{f_1} - a_{e_1} \ll a_{e_1}$$

les ondes du type 2 sont donc toujours faibles. Les chocs faibles sont aussi "épais" et leur structure peut être analysée avec les équations de Navier-Stokes. Le problème, pour les gaz inertes, est bien connu.

Les ondes de choc faibles font évidemment partie de la classe d'écoulements à laquelle l'expression (II.40) de l'opérateur de viscosité de volume est applicable. Les équations de la structure du choc peuvent donc être écrites sous la forme

$$(1) \quad \rho v = \rho_1 v_1 = J$$

$$(2) \quad p^* - p_1 + J(v - v_1) - 2\mu \frac{dv}{dx} - \left(\lambda \frac{dv}{dx}\right) = 0$$

(III.2)

$$(3) \quad J(h^* - h_1) + \frac{1}{2}(v^2 - v_1^2) - \frac{J}{\rho}\left(\lambda \frac{dv}{dx}\right) - 2\mu v \frac{dv}{dx}$$

$$- \chi \frac{dT}{dx} = 0.$$

Dans ces équations μ est le coefficient de viscosité tangentielle et χ le coefficient de transmission de la chaleur. Les calculs conduisant, à partir du système (III.2), à une seule équation qui détermine la variation des paramètres à l'intérieur du choc, sont analogues aux calculs relatifs aux gaz inertes ; nous les reproduisons brièvement.

Le petit paramètre du problème est $1/\delta$ où δ est l'épaisseur du choc. On a

$$p - p_1 \sim \rho - \rho_1 \sim \ldots \sim \frac{1}{\delta} \qquad s - s_1 \sim \frac{1}{\delta^2}$$

$$\frac{dp}{dx} \sim \ldots \sim \frac{p}{\delta}$$

Avec la précision envisagée

$$p^* - p_1 = \left(\frac{\partial p^*}{\partial \rho}\right)_s (\rho - \rho_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p^*}{\partial \rho^2}\right)_s (\rho - \rho_1)^2 + \left(\frac{\partial p^*}{\partial s}\right)_\rho (s - s_1)$$

et l'équation (III.2.3) conduit, après quelques transformations, à l'égalité

$$s - s_1 = - \frac{\chi}{JT^*}\left(\frac{\partial T^*}{\partial p^*}\right)_s \frac{dp^*}{dx}.$$

Les dérivées partielles sont calculées pour l'état amont. L'équation (III.2.2) devient

$$\left[J v_1 + \frac{J^2}{2 v_1^2}\left(\frac{\partial^2 p^*}{\partial \rho^2}\right)_s\right](v_1 - v)^2 - J(v_1^2 - a_{e_1}^2)(v_1 - v)$$

$$= v_1^2 \left[2\mu + \frac{\chi}{T^*}\left(\frac{\partial p^*}{\partial s}\right)_\rho \left(\frac{\partial T^*}{\partial p^*}\right)_s\right] \frac{dv}{dx} + v_1^2 \left(\lambda \frac{dv}{dx}\right).$$

Le membre de gauche de cette égalité s'annule en amont et en aval du choc ; aussi l'égalité peut s'écrire

$$\frac{1}{a_{e_1}}\left[\mathcal{J}a_{e_1}+\frac{\mathcal{J}^2}{2\,a_{e_1}}\left(\frac{\partial^2 p^*}{\partial\rho^2}\right)_s\right](v-v_2)(v_1-v)$$

$$=-\left[2\mu+\frac{\chi_1}{T_1^*}\left(\frac{\partial p^*}{\partial s}\right)_\rho\left(\frac{\partial T^*}{\partial p^*}\right)_s\frac{dv}{dx}\right]$$

$$-\frac{\rho_1}{v_1}\sum_{i=1}^{N} f_i\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho}\right)_s\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{l_i}{v_1}(x-y)\right]\frac{dv}{dy}\,dy.$$

Nous utilisons une nouvelle fonction inconnue ω définie par la relation

$$v=v_1+\omega\,(v_2-v_1)$$

et nous posons

$$\Lambda_o=\frac{(v_2-v_1)\left[2\mu+\frac{\chi_1}{T_1^*}\left(\frac{\partial p^*}{\partial s}\right)_\rho\left(\frac{\partial T^*}{\partial p^*}\right)_s\right]}{\frac{1}{a_{e_1}^2}\left[\mathcal{J}a_{e_1}+\frac{\mathcal{J}^2}{2\,a_{e_1}}\left(\frac{\partial^2 p^*}{\partial\rho^2}\right)_s\right]}$$

$$\beta_i=\frac{\frac{v_2-v_1}{\rho_1}\,f_i\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho}\right)_s}{\frac{1}{a_{e_1}^2}\left[\mathcal{J}a_{e_1}+\frac{\mathcal{J}^2}{2\,a_{e_1}}\left(\frac{\partial^2 p^*}{\partial\rho^2}\right)_s\right]}$$

$$\Lambda_i=\frac{v_1}{l_i}.$$

L'équation du problème devient :

(III.3)
$$\omega\,(1-\omega)=\Lambda_o\frac{d\omega}{dx}+\sum_{i=1}^{N}\beta_i\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{x-y}{\Lambda_i}\right)\frac{d\omega}{dy}\,dy.$$

L'avantage de la méthode utilisée consiste, en fait, dans la déduction rapide de l'équation ci-dessus qui ne paraît pas avoir été utilisée. Nous voulons ramener cette équation à un système d'équations différentielles ordinaires ; nous posons pour cela

$$I_i=\beta_i\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{x-y}{\Lambda_i}\right)\frac{d\omega}{dy}\,dy.$$

Le système équivalent à l'équation (III.3) est

$$\Lambda_o \frac{d\omega}{dx} = \omega(1-\omega) - \sum_{i=1}^{N} I_i$$

(III.4)

$$\Lambda_i \frac{dI_i}{dx} = \frac{\beta_i \Lambda_i}{\Lambda_o} \omega(1-\omega) - I_i - \frac{\beta_i \Lambda_i}{\Lambda_o} \sum_{j=1}^{N} I_j \qquad i = 1 \ldots N$$

Les conditions aux limites sont

$$\omega = 0 \qquad\qquad \omega = 1$$

$$x = -\infty \qquad\qquad x = +\infty$$

$$I_i = 0 \qquad\qquad I_i = 0$$

Le problème qui se pose est donc de déterminer la trajectoire qui passe par les deux points singuliers $P_1[\omega = 0 \ , \ I_i = 0]$ et $P_2[\omega = 1 \ , I_i = 0]$ du système (III.4). Nous admettons sans démonstration que la solution de ce problème existe, et qu'elle est unique.

Nous étudions cette équation dans quelques cas particuliers en vue d'obtenir des renseignements sur l'allure des courbes intégrales. Dans les cas extrêmes $\Lambda_o = 0$, $\beta_i = 0 \ i > 1$ (fluide non visqueux, une seule réaction chimique) et $\beta_i = 0$ (fluide inerte), les solutions du problème sont bien connues

1. $\Lambda_o = 0$, $\beta_i = 0 \ (i > 1)$. La solution

$$\frac{\omega^{\frac{\beta_i - 1}{2}}}{(1-\omega)^{\frac{\beta_i - 1}{2}}} = e^{\frac{x}{2\Lambda_1}}$$

n'existe que pour $\beta_i \geqslant 1$. Cette condition est équivalente à la condition $v_1 \leqslant a_{1_f}$ qui exprime le fait que l'onde est complètement dispersée. Dans le cas opposé ($\beta_i < 1$) l'onde possède un sous-choc visqueux mais l'équation (III.3) ne peut pas servir à la description de l'écoulement.

2. $\beta_i = 0$. La solution du problème est

$$\omega = \frac{e^{\frac{x}{\Lambda_o}}}{1 + e^{\frac{x}{\Lambda_o}}}$$

L'étude des solutions du système d'équations (III.4) est, dans le cas général, assez difficile. Les seuls points singuliers de ce système sont les points P_1 et P_2 . Au voisinage de ces points singuliers, l'équation caractéristique du système (III.4) est

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\Lambda_o} - \alpha k & -\frac{1}{\Lambda_o} \cdots\cdots\cdots\cdots & -\frac{1}{\Lambda_o} \\ \frac{\beta_1}{\Lambda_o} & -\frac{\beta_1}{\Lambda_o} - \frac{1}{\Lambda_1} - k \quad -\frac{\beta_1}{\Lambda_o} \cdots & -\frac{\beta_1}{\Lambda_o} \\ \frac{\beta_N}{\Lambda_o} & -\frac{\beta_N}{\Lambda_o} \cdots\cdots\cdots\cdots & -\frac{\beta_N}{\Lambda_o} - \frac{1}{\Lambda_N} - k \end{vmatrix} = 0$$

où $\alpha = 1$ au point singulier P_1, $\alpha = -1$ au point singulier P_2. Nous avons étudié la nature des points singuliers dans les cas où le système (III.4) se compose de deux équations ou de trois équations.

3. $\beta_i = 0 \quad i > 1$. C'est le cas d'un fluide visqueux qui est le siège d'une seule réaction chimique. Au point singulier P_1, l'équation caractéristique possède deux racines réelles et de signes contraires, données par les expressions suivantes

$$k_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{\beta_1}{\Lambda_o} + \frac{1}{\Lambda_1} - \frac{1}{\Lambda_o}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{\Lambda_o} + \frac{1}{\Lambda_1} - \frac{1}{\Lambda_o}\right)^2 + \frac{4}{\Lambda_o \Lambda_1}}\right] \tag{III.5.1.}$$

Ce point singulier est donc un col.

Au point singulier P_2, les deux racines de l'équation caractéristique sont

$$k_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{\beta_1}{\Lambda_o} + \frac{1}{\Lambda_1} + \frac{1}{\Lambda_o}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{\Lambda_o} + \frac{1}{\Lambda_1} + \frac{1}{\Lambda_o} - \frac{2}{\sqrt{\Lambda_o \Lambda_1}}\right)\left(\frac{\beta_1}{\Lambda_o} + \frac{1}{\Lambda_1} + \frac{1}{\Lambda_o} + \frac{2}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_o}}\right)}\right] \tag{III.5.2.}$$

Ces deux racines sont réelles et négatives, le point singulier P_2 est donc un noeud. La configuration des courbes intégrales est représentée sur la figure 4. Nous avons déterminé la courbe intégrale qui relie les points singuliers P_1, P_2, par intégration numérique ; les résultats obtenus sont présentés sur la figure 5.

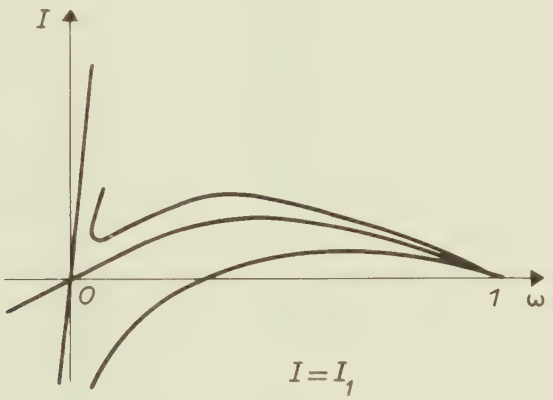


Fig. 4

4. $\Lambda_o = 0$, $\beta_1 = 0 \quad i > 2$. C'est le cas d'un fluide parfait qui est le siège de deux réactions chimiques. Le problème possède une solution uniquement pour

$$\beta_1 + \beta_2 > 1$$

cette inégalité exprime la condition $v_1 < a_{f_1}$ que nous avons adoptée.

Les racines de l'équation caractéristique sont

$$k_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1-\gamma_1}{\Lambda_1} - \frac{1-\gamma_2}{\Lambda_2} \pm \sqrt{\left[\frac{1}{\Lambda_1}(1-\gamma_1)^2 + \frac{4\,\gamma_1 \gamma_2}{\Lambda_1 \Lambda_2}\right]}\right\} \tag{III.6}$$

où l'on a noté

$$\gamma_i = \frac{\beta_i}{\beta_1 + \beta_2 - 1}$$

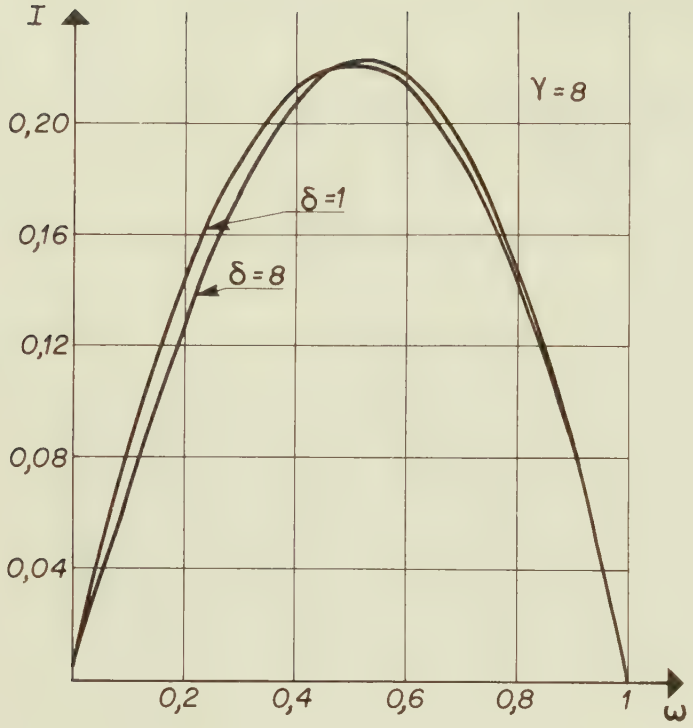


Fig. 5.1. - Intégrales de l'équation.

$$\delta \frac{dI}{d\omega} = \frac{\gamma\omega(1-\omega) - (1+\gamma)I}{\omega(1-\omega) - I}$$

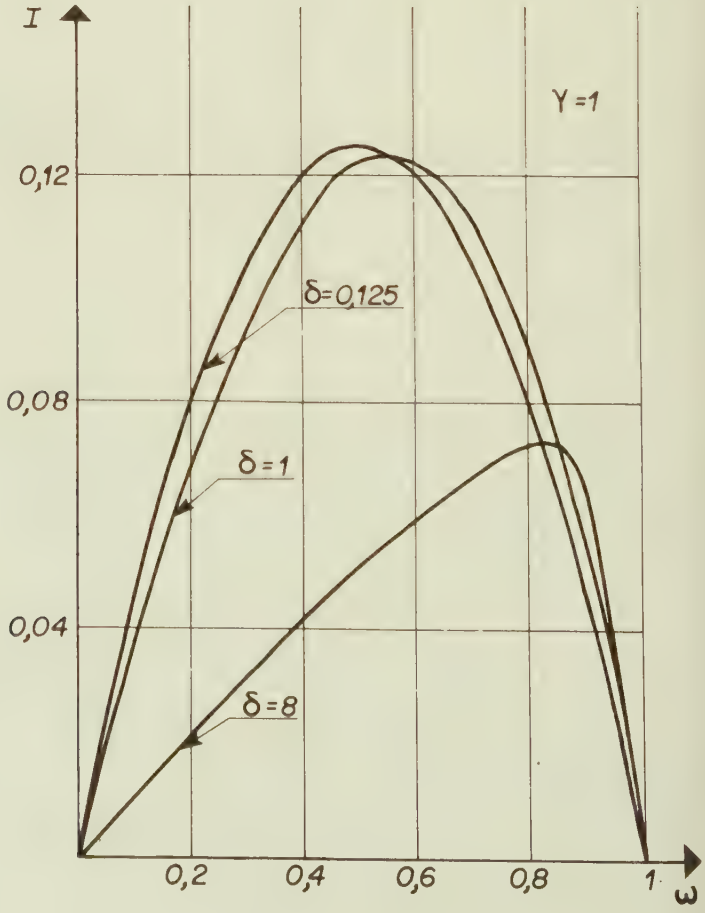


Fig. 5.2.

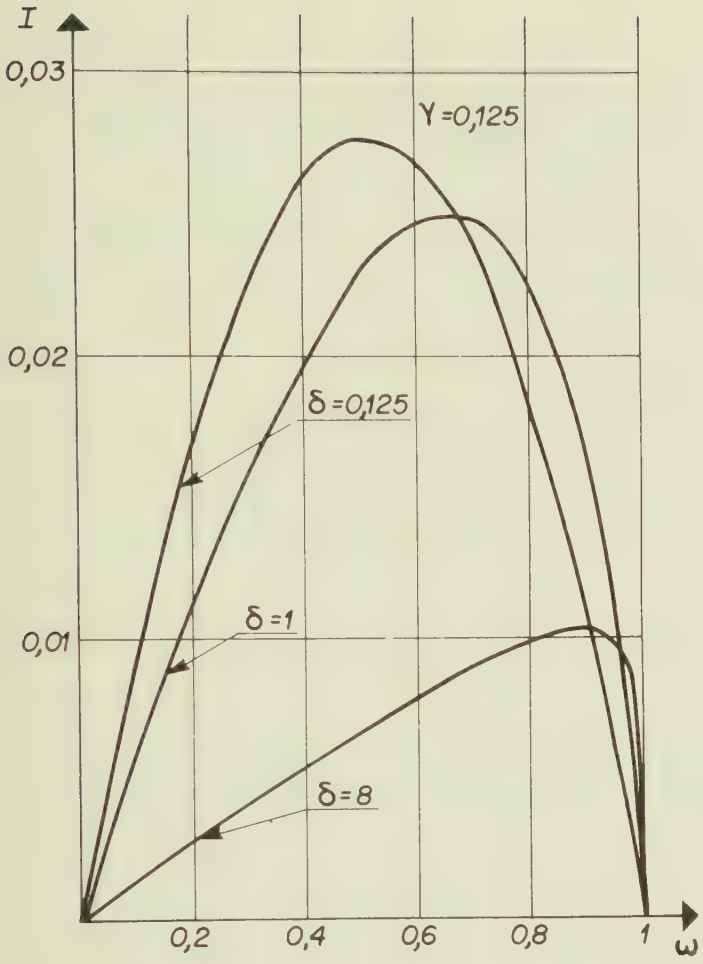
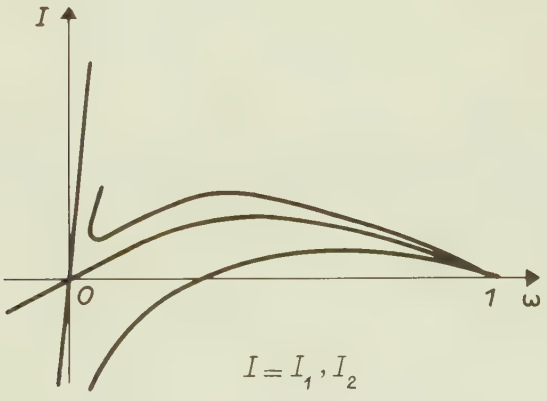


Fig. 5.3.

Fig. 6



au point singulier P_1 et

$$\gamma_i = \frac{\beta_i}{\beta_1 + \beta_2}$$

au point singulier P_2.

Les racines sont toujours réelles. Au point singulier P_1, les deux racines sont de signes contraires, ce point singulier est donc un col. Le point singulier P_2 est un noeud, les deux racines y étant négatives. La configuration des courbes intégrales est celle indiquée sur la figure 6.

5. $\beta_i = 0 \quad i > 2$. C'est le cas d'un fluide visqueux qui est le siège de deux réactions chimiques. Au point singulier P_1, l'équation caractéristique est

$$\text{(III.7.1.)} \qquad \left(\frac{1}{\Lambda_o} - k\right)\left(\frac{1}{\Lambda_1} + k\right)\left(\frac{1}{\Lambda_2} + k\right) - \frac{k}{\Lambda_o}\left(\frac{\beta_2}{\Lambda_1} + \frac{\beta_1}{\Lambda_2} + k\,(\beta_1 + \beta_2)\right) = 0.$$

On vérifie facilement que les trois racines de cette équation sont réelles. Soit, pour fixer les idées, $\gamma_1 > \gamma_2$; les grandeurs respectives des racines sont définies par les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{\Lambda_o} > k_1 > 0 \qquad\qquad -\frac{1}{\Lambda_1} > k_2 > -\frac{1}{\Lambda_2} > k_3.$$

L'équation caractéristique au point singulier P_2 est

$$\text{(III.7.2.)} \qquad \left(\frac{1}{\Lambda_o} + k\right)\left(\frac{1}{\Lambda_1} + k\right)\left(\frac{1}{\Lambda_2} + k\right) + \frac{k}{\Lambda_o}\left(\frac{\beta_2}{\Lambda_1} + \frac{\beta_1}{\Lambda_2} + k\,(\beta_1 + \beta_2)\right)$$

Les trois racines sont réelles et négatives. Le classement des racines est le suivant

a. $\Lambda_o > \Lambda_1$

$$0 > k_1 > -\frac{1}{\Lambda_o} \qquad\qquad -\frac{1}{\Lambda_1} > k_2 > -\frac{1}{\Lambda_2} > k_3$$

b. $\Lambda_1 > \Lambda_o > \Lambda_2$

$$0 > k_1 > -\frac{1}{\Lambda_1} \qquad\qquad -\frac{1}{\Lambda_1} > k_2 > -\frac{1}{\Lambda_2} > k_3$$

c. $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_o$

$$0 > k_1 > -\frac{1}{\Lambda_1} > k_2 > -\frac{1}{\Lambda_2} \qquad\qquad k_3 < -\frac{1}{\Lambda_o}$$

La structure de la zone de relaxation des degrés de liberté internes d'un choc, dans un gaz dont on néglige les coefficients de transfert, a été étudiée récemment dans le travail [64]. La méthode utilisée est différente de la nôtre, mais les résultats obtenus s'appliquent à la situation analysée dans ce paragraphe. La conclusion est la suivante :

Pour $\Lambda_o = 0$, on a

$$\omega > 0 \qquad\qquad \frac{d\omega}{dx} > 0.$$

III.2. - ÉCOULEMENT AVEC RÉACTIONS RAPIDES ET AVEC CONDITIONS INITIALES HORS D'ÉQUILIBRE DANS LES TUYÈRES.

Les deux problèmes, relatifs à l'écoulement avec réactions chimiques dans les tuyères, que nous envisageons sont les suivants :

a. L'écoulement en aval d'un choc droit,

b. L'écoulement d'un gaz qui pénètre dans la tuyère hors de l'état d'équilibre chimique.

Nous traitons ces deux problèmes dans l'hypothèse des réactions chimiques rapides. Plus précisément, soient v° , ρ° , s° , ξ° les paramètres de l'écoulement pour $x = 0$, immédiatement en aval du choc dans le cas du problème (a), et à l'entrée de la tuyère dans le cas du problème (b). La variation le long de l'axe de l'aire de la section normale de la tuyère est donnée par la fonction $A(x)$, la longueur caractéristique de la géométrie du problème est

$$\Lambda = \left[\frac{1}{A(x)} \frac{dA(x)}{dx} \right]^{-1}_{x=0}$$

Cette longueur caractéristique sert à la définition du paramètre ε. Nous admettrons que toutes les réactions chimiques sont rapides, $\beta_i > 0$, et soit $\beta = \inf \beta_i$. Les paramètres de l'écoulement sont recherchés sous la forme

$$M = M_0 + M_1 + o(\varepsilon^\beta) \qquad \text{(III.8)}$$
$$M_0 = \lim_{\epsilon \to 0} M .$$

C'est la détermination des quantités M_1 qui nous préoccupe et nous supposons que les quantités M_0, qui décrivent l'écoulement dans la tuyère d'un gaz en équilibre chimique, sont connues.

L'écoulement possède deux zones qualitativement distinctes

a. une zone de relaxation,
b. une zone de quasi-équilibre.

Conformément au schéma adopté, l'écoulement dans la zone b. est déterminé à l'aide de conditions aux limites qui dépendent de la variation des paramètres de l'écoulement dans la zone a.

Zone b. Dans le cadre des hypothèses que nous avons admises, l'écoulement dans la zone b. peut être décrit à l'aide d'un système d'équations dérivé du système (II.44) :

$$\rho v \frac{dv}{dx} = -\frac{d}{dx} \left\{ p^* - \lambda \frac{1}{A(x)} \frac{d}{dx} [v A(x)] \right\} \qquad 1.$$

$$\rho v A(x) = Q \qquad 2. \qquad \text{(III.9)}$$

$$\rho T^* v \frac{ds}{dx} = \lambda \left\{ \frac{1}{A(x)} \frac{d[v A(x)]}{dx} \right\}^2 \qquad 3.$$

L'intégrale de Bernouilli pour ce système d'équations, prend la forme suivante

$$h^* + \frac{v^2}{2} - \frac{\lambda}{\rho A(x)} \frac{d}{dx} [v A(x)] = H . \qquad \text{(III.10)}$$

Nous notons donc par :

$$\rho_0(x) \qquad s_0 = s^\circ = C^{te} \qquad v_0(x)$$

la solution des équations (III.9) avec $\lambda = 0$; cette solution dépend non seulement des deux constantes Q, H, mais aussi de la valeur de l'entropie dans la section initiale de la tuyère. Les équations prennent une forme plus maniable après l'introduction d'un "nombre de Reynolds local"

$$\Re = \left\{ \lambda \frac{d[v\, A(x)]}{\rho\, v^2\, A\,(x)\, dx} \right\}^{-1}$$

On a :

$$h_1^* = a_{e_o}^2\ \rho_1 + \left(\frac{\partial h^*}{\partial s}\right)_{\rho,0}\ s_1$$

avec des notations dont le sens est évident.

Le système qui détermine les perturbations devient

$$v_o\, \rho_1 + \rho_o\, v_1 = 0$$

$$\frac{ds_1}{dx} = \frac{v_o}{T_o^*} \frac{d[v_o\, A(x)]}{A(x)\, dx}\ \Re_o^{-1} \qquad \text{(III.11)}$$

$$\frac{a_{e_o}^2}{\rho_o}\, \rho_1 + v_o\, v_1 + \left(\frac{\partial h^*}{\partial s}\right)_{\rho,0} s_1 = v_o^2\, \Re_o^{-1}$$

la solution de ces équations est immédiate, nous la donnons ci-dessous

$$s_1 = s_1(0) + \int_o^x \frac{v_o}{T_o^*} \frac{d\,[v_o\, A(x)]}{A(x)\, dx}\ \Re_o^{-1}\ dx$$

$$v_1 = -\frac{v_o}{\rho_o}\, \rho_1 = v_o \left[v_o^2\ \Re_o^{-1} - \left(\frac{\partial h^*}{\partial s}\right)_{\rho,0} s_1 \right] \left(v_o^2 - a_{e_o}^2\right)^{-1} \qquad \text{(III.12)}$$

Ces formules résolvent le problème avec le degré de précision permis par le système (III.9). Elles contiennent un seul paramètre inconnu, l'entropie spécifique dans la section $x = 0$.

CONDITION A LA LIMITE - La relation qui nous manque peut être obtenue à l'aide de la méthode qui a déjà conduit à l'établissement des conditions de choc modifiées du paragraphe II.4. Il serait naturellement souhaitable d'obtenir une condition de choc pour l'entropie : malheureusement la méthode ne peut s'appliquer qu'à des quantités dont "l'équation de mouvement" est de la forme

$$\frac{dF}{dx} = G\, \frac{dA(x)}{dx}$$

et l'équation de production d'entropie n'est pas de ce type. Nous établissons la condition de choc pour la quantité $P = p + \rho\, v^2$ dont l'équation d'évolution est

$$\frac{dP}{dx} = -\, Q\, \frac{dA}{A^2\, dx}\, v.$$

Avec les notations du paragraphe (II.4), nous avons

$$\{P\}_+ = -\, Q \int_o^{\delta} \frac{dA}{A^2\, dx}\, v\, dx, \qquad \text{(III.13)}$$

$$\check{P}(0) - \hat{P}(0) = -Q \int_0^{\delta} \frac{dA}{A^2\, dx} (\hat{v} - \check{v})\, dx$$

(III.14)

$$= -Q \left(\frac{dA}{A^2\, dx}\right)_{x=0} \int_0^{\infty} [\hat{v}_0 - \check{v}_0(0)]\, dx + o(\varepsilon^{\beta})$$

où la fonction $\hat{v}_0(x)$ est une solution du système (II.57) avec les conditions initiales $p = p_0$, $\rho = \rho_0$ ...

La relation

$$\hat{P} = \hat{p}_0 + \frac{Q}{A(0)} \hat{v}_0.$$

conduit à une forme équivalente de la condition de choc

(III.15)
$$\check{P}(0) - \hat{P}(0) = \left(\frac{dA}{A\, dx}\right)_{x=0} \tilde{p}$$

Cette forme a l'avantage de faire intervenir la quantité $\tilde{p}$, déjà calculée pour la zone de relaxation d'un choc droit.

La détermination de la valeur initiale de l'entropie dans le développement extérieur ne présente plus aucune difficulté. On a

$$s_0(0) = \hat{s}_0(\infty)$$

$$\check{P}(0) = p^*(0) + \left(\rho_0 v_0^2\right)_{x=0} [1 - \Re_0(0)] = P_0 + \left(\frac{dA}{A\, dx}\right)_{x=0} \tilde{p}.$$

La seconde des relations ci-dessus peut encore s'écrire

$$p_1^*(0) + \frac{Q}{A(0)} [v_1(0) - v_0(0)\, \Re_0^{-1}(0)] = \left(\frac{dA}{A\, dx}\right)_{x=0} \tilde{p}.$$

L'utilisation des formules (III.12) et de l'identité thermodynamique

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(h^* - \frac{p^*}{\rho}\right)_{\rho} = T^*$$

conduit à l'expression de $s_1(0)$

(III.16)
$$s_1(0) = -\left[\frac{\rho_0 v_0^2\, \Re_0^{-1} + \dfrac{dA}{A\, dx} \tilde{p}}{\rho_0 T_0^*}\right]_{x=0}$$

On a ainsi résolu complètement le problème. Par rapport à l'écoulement en équilibre, l'entropie spécifique pour $x = +0$ est plus faible dans les tuyères divergentes et plus forte dans les tuyères convergentes. La formule (III.12) met en évidence la proportionnalité entre $s_1(0)$ et $(dA/A\, dx)_{x=0}$ résultat qui était à prévoir.

Le calcul de perturbation qui nous avons présenté n'est pas applicable à des tuyères qui possèdent des sections où l'écoulement de base (en équilibre chimique) a une vitesse sonique.

Les formules (III.12) donnent, en effet, pour $v_o = a_{e_o}$ des valeurs infinies pour la perturbation de la masse spécifique. La détermination du comportement de l'écoulement au voisinage du col de la tuyère nécessite une étude spéciale qui se fait en tenant compte des termes d'un ordre plus élevé que ceux que nous avons retenus.

III.3. - ÉCOULEMENT HYPERSONIQUE AUTOUR D'UN CORPS ÉMOUSSÉ DE RÉVOLUTION AU VOISINAGE DE L'AXE DE SYMÉTRIE.

L'aspect de l'écoulement hypersonique autour d'un corps émoussé est soumis à des modifications importantes avec la variation de l'altitude du vol. Au voisinage du nez les paramètres essentiels qui déterminent l'influence des réactions chimiques sont les rapports des longueurs de relaxation des réactions chimiques à la distance du détachement du choc. La situation envisagée est celle représentée sur la figure 7 ; elle correspond à des altitudes de vol moyennes. La relaxation chimique est pratiquement confinée à une couche de faible épaisseur qui borde l'onde de choc. Dans le reste de la zone perturbée de l'écoulement que nous voulons étudier, une situation de quasi-équilibre chimique s'établit.

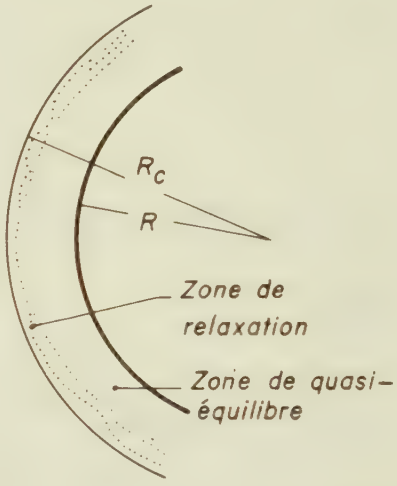


Fig. 7

La longueur géométrique caractéristique utilisée est la distance de détachement du choc. Nous considérons des corps dont le rayon de courbure sur l'axe de symétrie, R, est fini ; la distance de détachement du choc est alors $\sim R/10$. Les paramètres de référence pour le fluide sont ceux en aval d'un choc droit. Un écoulement du type de celui représenté se réalise dans un certain voisinage de l'axe de symétrie uniquement si, avec les paramètres de référence indiqués,

$$\beta_i = -\alpha_i > 0 \qquad\qquad i = 1 \ldots N.$$

Dans l'hypothèse exprimée par les inégalités ci-dessus, l'effet des écarts à l'équilibre chimique conduit à une petite perturbation de l'écoulement supposé en équilibre chimique. Cette perturbation peut être déterminée, en première approximation, à l'aide du système d'équations (III.17) que nous écrivons pour la convenance

$$\mathbf{v}\,\nabla\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla(p^* - \lambda\,\nabla\,\mathbf{v})$$

$$\nabla\,\rho\,\mathbf{v} = 0$$

(III.17)

$$\rho\,T^*\,\mathbf{v}\,\nabla\,s = \lambda(\nabla\,\mathbf{v})^2$$

$$h + \frac{v^2}{2} - \frac{\lambda}{\rho}\,\nabla\,\mathbf{v} = H$$

et avec les conditions aux limites modifiées (II.58).

Les conditions $\beta_i > 0$, $i = 1 \ldots N$, à elles seules, ne garantissent pas l'applicabilité du système (III.17) à l'étude du problème. Pour que les équations (III.17) avec les conditions de choc (II.58) conduisent à un problème bien posé, il est en effet nécessaire que les réactions chimiques soient rapides au moins dans toute la zone subsonique de l'écoulement. Cette

situation se réalise si les inégalités $\beta_i > 0$ persistent si l'on utilise comme paramètres de référence du fluide ceux en aval d'un choc oblique dont l'inclinaison est celle du choc détaché sur la ligne d'intersection avec la surface sonique.

Comme nous l'avons fait dans le cas de l'écoulement dans une tuyère, nous recherchons la solution sous la forme

$$M = M_0 + M_1 + o(\varepsilon^\beta) \qquad \beta = \inf \beta_i$$

où M_0 est la solution dans le cas d'un écoulement en équilibre chimique et M_1 la perturbation que nous voulons déterminer.

Les équations (III.17) conduisent à une analogie intéressante. En effectuant la substitution $\lambda \nabla \mathbf{v} = \lambda_0 \nabla \mathbf{v}_0 + o(\varepsilon^\beta)$, on observe que ces équations décrivent l'écoulement d'un fluide placé dans un champ de forces extérieures, dont la densité par unité de volume est

$$f_0 = \nabla(\lambda_0 \nabla \mathbf{v}_0)$$

le fluide possède des sources de chaleur, dont l'intensité est

$$q_0 = \lambda_0 (\nabla \mathbf{v}_0)^2 .$$

L'effet combiné des forces extérieures f_0 et des sources de chaleur q_0 est donc le même que celui de l'écart par rapport à l'équilibre chimique.

Le système d'équations qui détermine les perturbations peut être écrit sous la forme suivante

(III.18)

$$-\mathbf{v}_1 \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0 \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = T_0^* \nabla s_1 + \frac{\lambda_0 \nabla \mathbf{v}_0}{\rho_0^2} \nabla \rho_0 \qquad (1)$$

$$\nabla (\rho_1 \mathbf{v}_0 + \rho_0 \mathbf{v}_1) = 0 \qquad (2)$$

$$\mathbf{v}_0 \nabla s_1 + \mathbf{v}_1 \nabla s_0 = \frac{\lambda_0}{\rho_0 T_0^*} (\nabla \mathbf{v}_0)^2 \qquad (3)$$

$$h_1^* + v_0 v_1 = \frac{\lambda_0}{\rho_0} \nabla \mathbf{v}_0 \qquad (4)$$

$$h_1^* = \left(\frac{\partial h^*}{\partial \rho}\right)_{s,0} \rho_1 + \left(\frac{\partial h^*}{\partial s}\right)_{\rho,0} s_1 \qquad (5)$$

On se trouve donc, dans le cas général, en face d'un système linéaire de quatre équations aux dérivées partielles, assez difficile à résoudre.

Nous signalons plusieurs cas où la solution du problème s'obtient avec une relative facilité.

a. L'écoulement de base est incompressible (ρ_0 = const.). Les termes qui expriment, dans le système (III.18), les effets chimiques, s'annulent. L'influence des réactions chimiques intervient donc uniquement par l'intermédiaire des conditions de choc.

b. L'écoulement de base est isentropique et potentiel (rot $\mathbf{v}_0 = 0$). L'équation (III.18.3) s'intègre, le long des lignes de courant de l'écoulement de base. Soit σ une abscisse curviligne mesurée sur ces lignes de courant, on obtient :

(III.19)

$$s_1 = s_1(0) + \int_0^\sigma \frac{\lambda_0}{v_0 \rho_0 T_0^*} (\nabla \mathbf{v}_0)^2 \, d\sigma .$$

La surface $\sigma = 0$ coïncide avec la surface du choc. La valeur initiale $s_1(0)$ est déterminée par les conditions de choc modifiées. L'équation (III.18.1) devient

$$- \mathbf{v}_o \nabla \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = T_o^* \nabla s_1 + \frac{\lambda_o \nabla \mathbf{v}_o}{\rho_o^2} \nabla \rho_o .$$

Le membre de droite de cette équation est connu, elle détermine donc la composante de la rotation, perpendiculaire au vecteur $\mathbf{v}_o$.

Un cas particulier important est celui des écoulements plans ou de révolution, où les vecteurs $\mathbf{v}$ et rot $\mathbf{v}$ sont orthogonaux. La direction de la rotation de la vitesse est connue et l'équation ci-dessus détermine son module.

En résolvant le problème aux limites pour le système d'équations (III.18), on a généralement le choix entre deux possibilités. La première possibilité consiste à laisser inchangée la position de l'onde de choc et à déterminer la forme du corps auquel ce choc se rapporte dans l'écoulement perturbé ; c'est une méthode de résolution inverse.

En utilisant la deuxième possibilité, on laisse inchangée la forme du corps et l'on détermine le petit déplacement subi par la surface de l'onde de choc ; c'est en cela que consiste le problème direct ; généralement, le problème inverse présente moins de difficultés.

Ces rappels étant terminés, nous passons à l'étude du problème qui fait l'objet de ce paragraphe. Nous commençons par déterminer, pour un choc sphérique, les conditions de choc modifiées. Le système de coordonnées qui convient au problème est un système de coordonnées sphériques $(\eta , \theta , \varphi)$ dont l'origine se trouve au centre de la sphère de rayon R_c qui représente le choc. La symétrie de l'écoulement entraîne

$$\frac{\partial}{dx_2} = \frac{\partial}{R_c \, \partial\theta} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial x_1} = 0$$

les coefficients de la première forme quadratique sont

$$H_1 = \sin\theta \qquad\qquad H_2 = 1$$

et les deux courbures principales sont

$$K_1 = \frac{\sin\theta}{R_c} \qquad\qquad K_2 = \frac{1}{R_c}$$

Soit U_∞ la vitesse en amont du choc ; en aval de celui-ci

$$u_{10} = 0 \qquad\qquad u_{20} = u_{\theta o} = U_\infty \sin\theta .$$

Les conditions de choc (II.58) prennent pour un choc sphérique la forme ci-dessous :

(III.20)

$$[\rho w] = - \frac{U_\infty}{R_c \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin^2\theta \, \tilde{\rho}) \qquad (1)$$

$$[\rho w u_\theta] = - \frac{1}{R_c} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial\theta} \qquad (2)$$

$$[p + \rho w^2] = \lambda_o \nabla \mathbf{v}_o + \frac{U_\infty^2 \sin^2\theta}{R_c} \tilde{\rho} + \frac{2}{R_c} \tilde{p} \qquad (3)$$

$$[h^* + \frac{\mathbf{v}^2}{2}] = \frac{\lambda_o}{\rho_o} \nabla \mathbf{v}_o \qquad (4)$$

Nous résolvons ces équations dans les conditions usuelles des chocs forts

$$h_\infty = p_\infty = 0 ,$$

et soit α_o le rapport des masses spécifiques pour un choc sans épaisseur

$$\alpha_o = \frac{\rho_\infty}{\rho_o}$$

Les équations (III.20.1,2) donnent

$$u_{\theta_1} = - \frac{1}{\rho_\infty u_\infty R_c \cos\theta} \left[\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} - U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta \tilde{\rho}) \right] \tag{III.21}$$

On a également

$$h_1^* = \left(\frac{\partial h^*}{\partial \rho} \right)_{p^*,0} \rho_1 + \left(\frac{\partial h^*}{\partial p^*} \right)_{\rho,0} p_1^* .$$

Nous écrivons cette relation sous la forme

$$h_1^* = \frac{m}{\rho_\infty} p_1^* + \frac{n}{\rho_\infty} U_\infty^2 \rho_1$$

qui définit ainsi les paramètres m et n. Le système linéaire relatif aux termes connectifs p_1^*, ρ_1^*, w_1^* devient

$$\begin{aligned}
& U_\infty \rho_1 \cos\theta + \frac{\rho_\infty}{\alpha_o} w_1 = - \frac{U_\infty}{R_c \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta \tilde{\rho}) \\
& p_1^* + \rho_\infty U_\infty \cos\theta \, w_1 = \lambda_o \nabla \mathbf{v}_o + \frac{U_\infty^2 \sin^2 \theta}{R_c} \tilde{\rho} \\
& \qquad + \frac{2}{R_c} \tilde{p} + \frac{\alpha_o U_\infty^2 \cos\theta}{R_c \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta \rho) \\
& \frac{m_o}{\rho_\infty} p_1^* + \frac{n_o U_\infty^2}{\rho_\infty} \rho_1 + \alpha_o \cos\theta \, U_\infty \, w_1 = \\
& \qquad \frac{\lambda_o}{\rho_o} \nabla \mathbf{v}_o + \frac{\sin\theta}{\cos\theta \, \rho_\infty R_c} \left[\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} - U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta \rho) \right] .
\end{aligned} \tag{III.22}$$

Dans le cas le plus général, les quantités m_o, n_o, α_o .... sont des fonctions données de θ. La structure compliquée de ces fonctions ne permet pas d'exprimer la solution du système (III.22) sous forme analytique. Nous sommes ainsi de nouveau amenés à restreindre l'étude au voisinage de l'axe de symétrie.

Nous profitons d'abord de la possibilité déjà signalée et illustrée sur la figure 2, d'écrire les conditions de choc sur une surface dont la position est définie par l'équation

$$\tilde{\rho} = 0 .$$

La figure 2 montre que la surface $\tilde{\rho} = 0$ s'obtient en donnant à la surface du choc un petit déplacement vers l'aval ; la valeur du déplacement, mesuré sur la normale en chaque point, est

$$\delta_\rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_\infty \left(\frac{1}{\alpha_o - 1} \right)}$$

Le déplacement de la surface qui porte les conditions aux limites entraîne une modification de la valeur de $\tilde{p}$ à utiliser. La formule qui définit cette quantité montre que la valeur convenable est

$$\tilde{p}_\rho = \tilde{p} + \delta_\rho \, p_o \, .$$

Les autres simplifications possibles sont déjà spéficiques au problème étudié.

La manière naturelle d'aborder l'étude de l'écoulement au voisinage de l'axe de symétrie consiste à développer en série les seconds membres des relations qui expriment les conditions aux limites, soit

$$A = A^\circ + A^1 \sin^2 \theta + \ldots$$

les coefficients A^i étant des constantes. Les fonctions inconnues sont également développées en séries, de la forme

$$B = B^\circ (r) + B^1 (r) \sin^2 \theta + \ldots$$

ou de la forme

$$B = \sin^2 \theta \, [B^\circ (r) + B^1 (r) \sin^2 \theta + \ldots]$$

et les fonctions $B^i (r)$ sont elles-mêmes représentées sous la forme

$$B^i (r) = B^i_o (r) + B^i_1 (r) + o(\varepsilon^\beta) \, .$$

En admettant que les fonctions $B^i_o (r)$, qui décrivent l'écoulement en équilibre chimique, sont connues, il est possible d'obtenir ainsi un système linéaire d'équations différentielles ordinaires pour les fonctions $B^i_1 (r)$.

La réalisation de ce programme se heurte à des difficultés importantes, sinon insurmontables. Déjà pour les gaz inertes, les fonctions $B^i_o (r)$ s'obtiennent par des calculs très laborieux ; ces calculs deviennent inextricables dès que l'on tient compte des réactions chimiques. Il est donc pratiquement impossible de déterminer les coefficients du système d'équations pour les fonctions $B^i_1 (r)$ si l'on ne veut pas recourir, dès le début, à des calculs numériques.

En renonçant à l'idée d'une solution rigoureuse, la possibilité se présente d'utiliser, pour les fonctions $B^i_o (r)$, des expressions approximatives données par LIGHTHILL [7]. La solution de LIGHTHILL décrit l'écoulement d'un fluide incompressible entre une onde de choc sphérique et un obstacle également sphérique, avec l'hypothèse supplémentaire $\alpha_o = C^{te}$. La comparaison de cette solution avec des résultats plus exacts montre que l'écoulement au voisinage de l'axe de révolution est bien représenté ainsi, dans le cas où le courant amont est hypersonique.

On utilise une fonction de courant Ψ définie par les relations

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = r \sin \theta \, u_\theta \qquad\qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = - r^2 \sin \theta \, w \, .$$

Les conditions aux limites sur le choc sont

$$w_o = - \alpha_o \cos \theta \, U_\infty \qquad\qquad u_{\theta_o} = \sin \theta \, U_\infty \, .$$

La solution de LIGHTHILL s'écrit :

$$\rho = \frac{\rho_\infty}{\alpha_o} = C^{te}$$

(III.23)
$$\Psi_o = \sin^2\theta\, R_{c_o}^2\, U_\infty\, \Psi_o\left(\frac{r}{R_{c_o}},\ \alpha_o\right)$$

$$\Psi_o = \frac{\alpha_o}{30}\left\{\frac{3(1-\alpha_o)^2}{\alpha_o^2}\left(\frac{r}{R_{c_o}}\right)^4 - \frac{5(1-4\alpha_o)}{\alpha_o^2}\left(\frac{r}{R_{c_o}}\right)^2 + \frac{2(1-\alpha_o)(1-6\alpha_o)}{\alpha_o^2}\,\frac{R_{c_o}}{r}\right\}$$

Le rayon R_o du corps est déterminé par l'équation $\psi_o = 0$, soit

$$R_o = R_{c_o}\, g(\alpha_o).$$

La fonction Ψ_o nous servira à déterminer les fonctions $B_o{}^o(r)$.

Les approximations qui conduisent à la solution (III.23) sont telles que le fait que cette solution soit bien vérifiée au voisinage de l'axe de symétrie peut surprendre. Probablement, cette zone de l'écoulement est elle, dans une certaine mesure, autonome.

Pour expliciter les conditions de choc modifiées, posons

$$\tilde{p} = \Re^{-1}\,\frac{R_{c_o}\,\rho_\infty\,U_\infty^2\cos^2\theta}{2}\,[1 + \pi_1\sin^2\theta + \ldots]$$

Le nombre $\Re$ joue le rôle d'un nombre de Reynolds. Pour la solution (III.23)

$$\lambda_o\,\nabla\,\mathbf{v}_o = 0$$

et les corrections des valeurs des paramètres sur le choc prennent, au voisinage de l'axe de symétrie, la forme simple suivante

(III.24)
$$\rho_1 = -\frac{\rho_\infty}{\alpha_o}\,\Re^{-1}\left(\frac{m_o}{\Lambda_o} + \ldots\right)$$

$$w_1 = \alpha_o\,U_\infty\cos\theta\,\Re^{-1}\left(\frac{m_o}{\Delta_o} + \ldots\right)$$

$$p_1^* = \rho_\infty\,U_\infty^2\cos^2\theta\,\Re^{-1}\left(\frac{n_o/\alpha_o - 1}{\Delta_o} + \ldots\right)$$

$$u_{\theta_1} = -\,U_\infty\sin\theta\,\Re^{-1}\,[(1-\pi_1) + \ldots]$$

les termes non écrits étant proportionnels à des puissances positives de $\sin^2\theta$. Nous avons noté

$$\Lambda = \frac{n}{\alpha} + m\alpha - 1.$$

Les paramètres α_o, m_o, n_o sont calculés immédiatement en aval du sommet du choc.

Nous voudrions obtenir une description approximative de l'écoulement au voisinage de l'axe de symétrie, valable avec la précision des formules de LIGHTHILL. En faisant appel à l'autonomie relative de l'écoulement dans cette zone, on peut espérer atteindre le but poursuivi en déterminant l'écoulement incompressible en aval d'un choc sphérique, avec des conditions

aux limites corrigées par les formules (III.24). L'équation pour la fonction de courant est linéaire et la solution se détermine sans difficulté. L'artifice suivant permet pourtant d'éviter ces calculs.

On définit une vitesse "effective" et une valeur effective de la quantité α par les relations

$$U_{\text{eff}} = U_\infty \left[1 - \frac{(1 - \pi_1)}{\Re} \right]$$

(III.25)

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha_o \left\{ 1 + \frac{1}{\Re} \left[- (1 - \pi_1) + \frac{m_o}{\Lambda_o} \right] \right\}$$

Avec ces valeurs effectives, les conditions à la limite s'écrivent

$$w_o + w_1 = - \alpha_{\text{eff}} U_{\text{eff}} \cos \theta + o\left(\frac{1}{\Re}\right)$$

$$w_{\theta_o} + u_{\theta_1} = U_{\text{eff}} \sin \theta + o\left(\frac{1}{\Re}\right)$$

On a $\Re^{-1} = 0(\varepsilon^\beta)$, les termes $o\left(\frac{1}{\Re}\right)$ sont donc négligeables. Rappelons que les conditions ci-dessus ne sont pas valables sur le choc, mais sur une surface dont l'équation est

$$r = R_c(\theta) - \delta_\rho(\theta).$$

En admettant que cette surface est une sphère de rayon R_{c_o}, la solution du problème est immédiate. Les conditions sur le choc sont en effet similaires pour les quantités w_o, U_{θ_o} et $w_o + w_1$, $u_{\theta_o} + u_{\theta_1}$ la fonction de courant a donc la forme obtenue par LIGHTHILL, où l'on effectue les substitutions

$$U_\infty \longrightarrow U_{\text{eff}} \qquad\qquad \alpha_o \longrightarrow \alpha_{\text{eff}}.$$

Avec le degré de précision de la fonction Ψ_o, on a donc

(III.27)
$$\Psi_o + \Psi_1 = \Psi_o\left(\frac{\tau}{R_{c_o}}, \alpha_{\text{eff}}\right) + o\left(\frac{1}{\Re}\right).$$

L'équation de la surface du corps est $\Psi_o + \Psi_1 = 0$, le corps est donc une sphère de rayon

(III.28)
$$R = R_{c_o}\, g(\alpha_{\text{eff}}).$$

L'équation de choc est

(III.29)
$$R_c(\theta) = R_{c_o} + \delta_\rho(\theta)$$

Au voisinage de l'axe de symétrie cette surface est voisine d'une sphère, qui en général n'est pas concentrique à la sphère qui représente le corps. La distance de détachement du choc s'obtient sous la forme

(III.30)
$$d = R_{c_o}\,[1 - g(\alpha_{\text{eff}})] + \delta_\rho(0).$$

La méthode de résolution indirecte que nous avons adoptée consiste donc à laisser inchangé le rayon de la sphère $\widetilde{\rho} = 0$, tandis que le choc et l'obstacle subissent des petits déplacements. Il est évidemment clair que la différence entre le résultat obtenu par la méthode utilisée et celui obtenu par la méthode directe est insignifiante ; le rayon de courbure du corps sur l'axe de symétrie étant donné, le rayon de la sphère $\widetilde{\rho} = 0$ est déterminé par la relation (III.28).

Pour terminer, nous calculons la variation de la pression au point d'arrêt produite par les réactions chimiques. L'écoulement perturbé est encore incompressible, on a donc $p = p^*$; des variations de la pression totale sur une ligne de courant ne se produisent qu'à la traversée du choc. Soit p_t la pression au point d'arrêt, on a

$$p_t = p_{t_o} + \rho_\infty U_\infty^2 \Re^{-1} \left[1 + \frac{\frac{n_o}{\alpha_o} - 1}{\Lambda_o} \right] \tag{III.31}$$

Chapitre IV

ÉCOULEMENTS AVEC RÉACTIONS CHIMIQUES LENTES

IV.1. - CONSIDÉRATIONS SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DES ÉCOULEMENTS AVEC RÉACTIONS CHIMIQUES LENTES.

Nous nous proposons d'étudier quelques propriétés des écoulements caractérisés par une progression faible des réactions chimiques le long des lignes de courant. Nous admettons que toutes les réactions chimiques sont lentes, dans les équations de cinétique chimique, l'on a

$$\alpha_i \geqslant 1 \qquad\qquad i = 1 \ldots N.$$

Les équations du mouvement se présentent sous la forme de polynômes de ε, la solution du problème peut ainsi être recherchée comme une série de puissances de ε

$$\overline{M} = \overline{M}_o + \varepsilon^\alpha \overline{M}_1 + \ldots \qquad\qquad \alpha = \inf \alpha_i$$

ou

$$M = M_o + M_1 + \ldots$$

Pour fixer les idées, considérons le problème inverse relatif à un écoulement avec choc détaché, autour d'un obstacle. Nous avons vu qu'une définition convenable de ε s'effectue en utilisant comme paramètres de référence, ceux de l'écoulement en aval d'un choc droit et comme longueur de référence une longueur caractéristique du corps. Admettons que les fonctions qui

figurent dans les équations du mouvement sont des fonctions analytiques des variables dont elles dépendent ; admettons également que le choc est une surface analytique. Le passage à la limite $\varepsilon \to 0$ est régulier pour les équations de cinétique chimique

$$\bar{\mathbf{v}}\,\bar{\nabla}\,\bar{\xi}_i = \varepsilon^{a_i}\,\bar{L}_i .$$

On peut donc affirmer que le vecteur $\bar{M}(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon)$ est, dans les conditions ci-dessus, un vecteur analytique dans un certain voisinage $\mathcal{V}(\varepsilon)$ du choc. Il est toutefois facile de voir que $\mathcal{V}(\varepsilon)$ n'occupe jamais toute la région comprise entre le choc et l'obstacle émoussé. En effet, lorsque $\varepsilon = 0$, les équations décrivent un écoulement caractérisé par les relations $\xi = \xi_0 = C^{te}$ sur chaque ligne de courant. Les réactions chimiques sont figées, c'est donc un problème classique pour un gaz inerte. D'autre part, avec $\varepsilon \neq 0$, au point d'arrêt, où $\mathbf{v} = 0$,

$$L_i = 0 \qquad\qquad i = 1 \ldots N$$

la composition chimique en ce point est donc toujours celle de l'équilibre chimique. La position du point d'arrêt étant définie par $\mathbf{x} = \mathbf{x}_a$, il vient

$$\lim_{\epsilon \to 0} [\xi(\mathbf{x}, \varepsilon) - \xi_0] = \varphi(\mathbf{x}, 0) - \xi_0 \neq 0 \tag{IV.2}$$

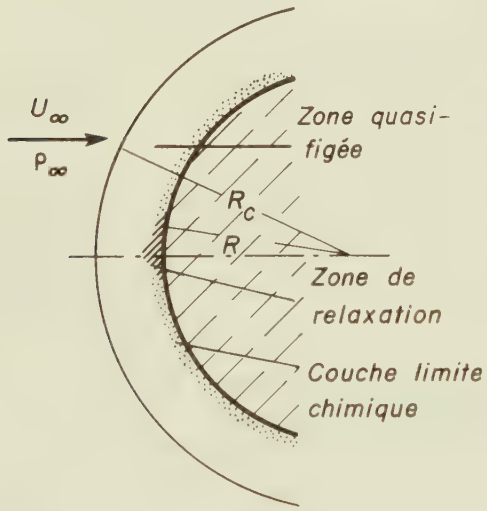


Fig. 8

ce qui exclut la validité du développement (IV.1) en ce point. L'évolution vers l'équilibre chimique qui s'établit au point d'arrêt s'accompagne d'une production d'entropie, le développement (IV.1) n'est donc également plus valable dans le voisinage du corps. Le schéma de l'écoulement est celui représenté sur la figure 8. La couche limite chimique, accolée au choc dans le cas d'un écoulement avec réactions rapides, enveloppe le corps si les réactions sont lentes.

L'idée qui se présente au premier abord est d'essayer de déterminer la solution par une méthode de raccordement de développements asymptotiques proximaux et distaux. Nous montrerons toutefois plus tard, sur un exemple simple, que l'épaisseur de la couche limite chimique est exponentiellement petite en ε. Il n'y a donc pas lieu de tenir compte de la couche chimique si l'on se contente de considérer le développement (IV.1) comme une série asymptotique. Le point d'arrêt ne fait pas partie du domaine de validité de ce développement, certaines composantes des vecteurs

$$\bar{M}_i \qquad\qquad i > 0$$

y étant singulières. D'autre part, un développement de la forme (IV.1) ne pourrait être valable en un point dont la distance d au choc, mesurée sur la ligne de courant, est

$$\bar{d} \sim \frac{1}{\varepsilon} .$$

Pour que le problème soit bien posé, il est donc nécessaire que les points pour lesquels la relation ci-dessus est satisfaite fassent partie de la zone supersonique de l'écoulement.

Nous discutons toujours le problème inverse, la solution de ce problème pour un gaz avec réactions chimiques figées $\bar{M}_0$ est supposée connue. Le vecteur M_i, $i > 0$, est solution d'un

système linéaire d'équations aux dérivées partielles, dont les coefficients dépendent des vecteurs M_j , $j < i$. Les conditions aux limites sont

$$M_i = 0 \text{ sur le choc}, \qquad i > 0 .$$

Nous n'écrivons pas ce système d'équations dans le cas général ; nous nous bornons à l'étude des corrections dont l'ordre en ε est le plus bas possible. Avec la notation inf $\alpha_i = \alpha$, l'on a

$$\overline{M} = \overline{M}_0 + \varepsilon^{\alpha} \overline{M}_1 + o(\varepsilon^{\alpha}).$$

Soit

$$\alpha_i = \alpha \qquad i = 1 \ldots N_1$$

il vient

$$\mathbf{v}_0 \nabla \xi_{i_1} = L_{i_0}(\mathbf{x}) \qquad i = 1 \ldots N_1$$

$$\mathbf{v}_0 \nabla \xi_{i_1} = 0 \qquad i = N_1+1 \ldots N$$

Ces équations s'intègrent et donnent

$$\xi_{i_1} = \int_0^{\sigma} \frac{L_{i_0}\, d\sigma}{v_0} \qquad i = 1 \ldots N_1$$

$$\xi_{i_1} = 0 \qquad i = N_1+1 \ldots N$$

Dans l'intégrale ci-dessus, qui s'effectue le long des lignes de courant de l'écoulement inerte, σ est une abscisse curviligne.

Les relations suivantes sont valables avec la précision $o(\varepsilon^{\alpha})$ sans mention spéciale. On a

$$p = F(\rho, s, \xi_0) + \sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\right)_0 \xi_{i_1} . \tag{IV.4}$$

En écrivant

$$p = p_f + \sum_{i=1}^{N_1} \chi_{i_0} \xi_{i_1}$$

les fonctions p_f, χ_i sont définies. Comme dans le cas des écoulements avec réactions rapides, le système d'équations du mouvement se met sous la forme

$$\mathbf{v} \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p_f + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}$$

$$\nabla \rho \mathbf{v} = 0$$

$$\rho T \mathbf{v} \nabla s = q$$

et décrit l'écoulement dans un champ de forces extérieures d'un fluide avec sources de chaleur. La densité des forces extérieures fictives est

$$\mathbf{f} = -\nabla U = -\nabla \sum_{i=1}^{N_1'} \chi_{i_0} \xi_{i_1} \tag{IV.5}$$

l'intensité des sources fictives de chaleur est

$$q = \rho_o \, T_o \sum_{i=1}^{N_1} A_{i_o} \, L_{i_o} \, . \tag{IV.6}$$

L'analogie formelle avec le cas d'un écoulement en quasi-équilibre est assez poussée et plusieurs observations du paragraphe III.3 restent valables pour les écoulements presque figés. La principale différence entre les deux situations provient du fait que les quantités U, q qui étaient proportionnelles à respectivement $\nabla \mathbf{v}_o$, $(\nabla \mathbf{v}_o)^2$ dans le cas du quasi-équilibre sont ici fonctions des paramètres thermodynamiques uniquement et ne s'annulent pas dans un écoulement incompressible. Une autre différence réside dans la structure des conditions aux limites. Pour un écoulement presque en équilibre cette structure dépend de la précision de la solution ; elle est invariable dans un écoulement presque figé.

Un des résultats qui se transposent presque sans changement est celui sur les écoulements dans les tuyères, exposé au paragraphe III.2. Les formules restent formellement les mêmes, avec toutefois

$$s_1 (0) = 0 \, .$$

Le calcul des perturbations dues aux réactions chimiques est relativement simple dans le cas des écoulements plans. Les variables indépendantes adaptées au problème sont la fonction de courant Ψ et une abscisse curviligne σ mesurée sur les lignes de courant. En notant par μ l'angle du vecteur vitesse avec l'axe des abscisses, les équations du mouvement deviennent

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial \Psi} = v \frac{\partial \mu}{\partial \sigma} \\
&\frac{\partial \rho v}{\partial \sigma} = \rho^2 \, v^2 \frac{\partial \mu}{\partial \Psi} \\
&\frac{\partial \xi_i}{\partial \sigma} = \frac{1}{v} L_i \\
&\frac{\partial s}{\partial \sigma} = \frac{1}{v} \sum A_i \, L_i \, .
\end{aligned} \tag{IV.7}$$

Pour un écoulement presque figé, les dernières $N_1 + 1$ équations ci-dessus s'intègrent. Les deux premières équations fournissent alors, pour chacune des quantités M_1 une équation de la forme

$$A_1 \frac{\partial^2 M_1}{\partial \Psi^2} + B_1 \frac{\partial^2 M_1}{\partial \sigma^2} + A_2 \frac{\partial M_1}{\partial \Psi} + B_2 \frac{\partial M_1}{\partial \sigma} + C_1 = 0.$$

avec les conditions aux limites

$$M_1 = \frac{\partial M_1}{\partial \Psi} = 0 \qquad\qquad \sigma = 0 \, .$$

Les fonctions A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 sont des fonctions connues de Ψ et de σ.

IV.2 - ÉCOULEMENT HYPERSONIQUE AUTOUR D'UN CORPS ÉMOUSSÉ DE RÉVOLUTION AU VOISINAGE DE L'AXE DE SYMÉTRIE.

Nous ne nous proposons pas de donner une solution rigoureuse de ce problème, déjà très difficile pour un gaz inerte. Le but envisagé, beaucoup plus restreint, est de généraliser la solution de LIGHTHILL au cas d'un écoulement qui est le siège de réactions chimiques lentes.

Nous commençons par déduire un système d'équations décrivant un écoulement avec un nombre de Mach faible, en tenant compte des réactions chimiques. L'approximation qui consiste à poser

$$\rho = C^{te} + 0(M^2)$$

où M est le nombre de Mach ne peut s'appliquer au problème traité. En effet, la relation

$$\mathbf{v} \nabla \rho = -\frac{\rho}{a_f^2} \mathbf{v} \nabla v^2 + \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{\rho, \xi} A_i + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \right)_{s, \rho} \right] L_i$$

montre que des variations importantes de la masse spécifique peuvent avoir lieu à des vitesses très petite. Dans ce qui suit, nous négligeons systématiquement, où cela est possible, les termes qui sont de l'ordre de M^2.

En notant par Ψ la fonction de courant de l'écoulement définie précédemment, on a les égalités évidentes

$$p = p_0(\Psi)\,[1 + 0(M^2)] \qquad\qquad h = h_0(\Psi)\,[1 + 0(M^2)].$$

Les fonctions $p_0(\Psi)$, $h_0(\Psi)$ sont déterminées par les conditions aux limites. L'hypothèse $\rho = C^{te}$ est donc remplacée par l'hypothèse

(IV.8) $$\rho(p, h, \xi) = \rho\,[p_0(\Psi)\,,\, h_0(\Psi)\,,\, \xi].$$

La même substitution peut être opérée dans les expressions des autres fonctions thermodynamiques qui deviennent ainsi des fonctions connues de Ψ et des degrés d'avancement.

Une équation pour la fonction de courant s'obtient en partant de l'équation de la quantité de mouvement qui a, pour un écoulement de révolution, la forme suivante

$$v\,|\mathrm{rot}\,\mathbf{v}| = T\,|\nabla s - \sum_{i=1}^{N} A_i \nabla \xi_i|$$

Dans le cadre des hypothèses adoptées, l'on a

$$\nabla s - \sum_{i=1}^{N} A_i \nabla \xi_i = \left(\frac{\partial s}{\partial \Psi} \right)_{\xi} \nabla \Psi$$

et l'équation de la quantité de mouvement devient

$$\frac{|\mathrm{rot}\,\mathbf{v}|}{\rho r \sin\theta} + T \frac{\partial s}{\partial \Psi} = 0.$$

Nous obtenons ainsi, pour la description des écoulements lents, le système suivant d'équations avec $\rho = C^{te}$.

(IV.9)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta\,\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + r^2 \sin\theta\, T\left(\frac{\partial s}{\partial\Psi}\right)_{\xi} = 0 \qquad (0)$$

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\frac{\partial\xi_i}{\partial r}+\frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial\xi_i}{\partial\theta} = r^2 \sin\theta\,\rho\, L_i \qquad (i)$$

$$i = 1 \ldots N.$$

En passant à l'étude du voisinage de l'axe de symétrie en aval d'un choc sphérique, il est naturel de rechercher les fonctions inconnues sous la forme

(IV.10)

$$\Psi = \sin^2\theta\,[\psi^{\circ}(r) + \sin^2\theta\,\psi^{1}(r) + \ldots]$$

$$\xi = \xi^{\circ}(r) + \sin^2\theta\,\xi^{1}(r) + \ldots$$

et d'effectuer un développement du système (IV.9) en puissances de $\sin^2\theta$. Toutefois, du fait de la structure non linéaire de ce système, il est impossible d'obtenir un nombre d'équations qui soit égal au nombre des inconnues.

Malgré son apparente complexité, le système (IV.9) est bien adapté à l'étude des écoulements presque figés. Notons

$$\rho\, T\left(\frac{\partial s}{\partial\Psi}\right)_{\xi} = \mathcal{G}(\Psi,\xi) \qquad \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\xi_i} = \mathcal{G}_i \;\; ; \;\; \rho\, L_i = \mathcal{S}_i(\Psi,\xi) \qquad \frac{\partial\rho}{\partial\xi_i} = \rho_i(\Psi,\xi).$$

Les équations (IV.9.i) donnent

(IV.11.i)

$$-\frac{\partial\Psi_{\circ}}{\partial\theta}\frac{\partial\xi_{i_1}}{\partial r}+\frac{\partial\Psi_{\circ}}{\partial r}\frac{\partial\xi_{i_1}}{\partial\theta} = r^2 \sin\theta\,\mathcal{S}_{i_{\circ}}.$$

Ces équations sont indépendantes les unes des autres et, en principe, s'intègrent sans difficulté. L'équation (IV.9.0) fournit ensuite une équation linéaire du second ordre pour Ψ_1.

La solution de base utilisée est celle de LIGHTHILL ; en effet, appliquée à l'écoulement figé en aval d'un choc intense, l'équation (IV.9.0) est identique à l'équation utilisée par cet auteur, puisque l'on a (*)

$$\rho(\Psi, \xi_{\circ}) = \frac{\rho_{\infty}}{\alpha} = C^{te}.$$

(*) Ne pas confondre avec le nombre entier α du terme ϵ^{α}.

Pour obtenir effectivement la solution, nous effectuons encore un développement des expressions (IV.10) en puissance de ε

$$\psi_0^{\circ} = \psi_0^{\circ} + \varepsilon^{\alpha}\, \psi_1^{\circ} + o(\varepsilon^{\alpha})$$

$$\xi_i = \xi_{i_0}^{\circ} + \varepsilon^{\alpha}\, \xi_{i_1} + o(\varepsilon^{\alpha})$$

et nous obtenons les équations suivantes

$$\frac{d^2 \psi_1^{\circ}}{dx^2} - \frac{2}{r^2}\psi_1^{\circ} - \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\rho_i(0,\xi_0)}{\rho_0}\left(\frac{d\psi_0^{\circ}}{dr}\frac{d\xi_{i_1}^{\circ}}{dr} + \frac{4}{r^2}\psi_0^{\circ}\ \xi_{i_1}^{1}\right)$$

$$+ r^2 \sum_{i=1}^{N_1} \mathcal{G}_i(0,\xi_0)\ \xi_{i_1}^{\circ} = 0 \qquad \text{(IV.12)}$$

$$-\frac{2\psi_0^{\circ}}{r^2}\frac{d\xi_{i_1}^{\circ}}{dr} = \mathcal{L}_i(0,\xi_0) \qquad i = 1 \ldots N_1$$

$$-\frac{2(\psi_0^{\circ})^2}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{\xi_{i_1}^{1}}{\psi_0^{\circ}}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{S}_i(0,\xi_0) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \Psi}\right)_{\substack{\psi=0 \\ \xi=\xi_0}}$$

Les $(2N_1+1)$ équations ci-dessus forment un système fermé pour les $2N_1+1$ inconnues ψ_1°, $\xi_{i_1}^{\circ}$, $\xi_{i_1}^{1}$. Ce système est suffisant pour déterminer la distance de détachement du choc et la variation des paramètres au voisinage de l'axe de symétrie. Pour déterminer le rayon de courbure du nez du corps qui correspond à un choc sphérique de rayon donné, il est nécessaire d'écrire des équations pour les quantités ψ_1^{1} et $\xi_{i_1}^{2}$, ce qui n'a pas été fait. Notons toutefois que ces équations ne font pas intervenir des inconnues nouvelles.

L'intégration du système (IV.12) est élémentaire, nous l'avons effectué dans le cas où l'écoulement figé est celui d'un gaz biatomique. On utilise les notations suivantes

$$m_i = \frac{36\, R_c}{\rho_\infty U_\infty}\mathcal{S}_i(0,\xi_0) \qquad n_i = \frac{R_c}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \psi}\right)_{\substack{\psi=0 \\ \xi=\xi}}$$

$$A(x) = \int_x^1 \frac{dx_1}{5x_1^2 - 4} \qquad B(x) = \int_x^1 \frac{dx_1}{x_1^2 (5x_1^2 - 4)^2}$$

$$x = \frac{r}{R_c}$$

où R_c est le rayon du choc.

La solution du système d'équations (IV.12) s'écrit sous la forme

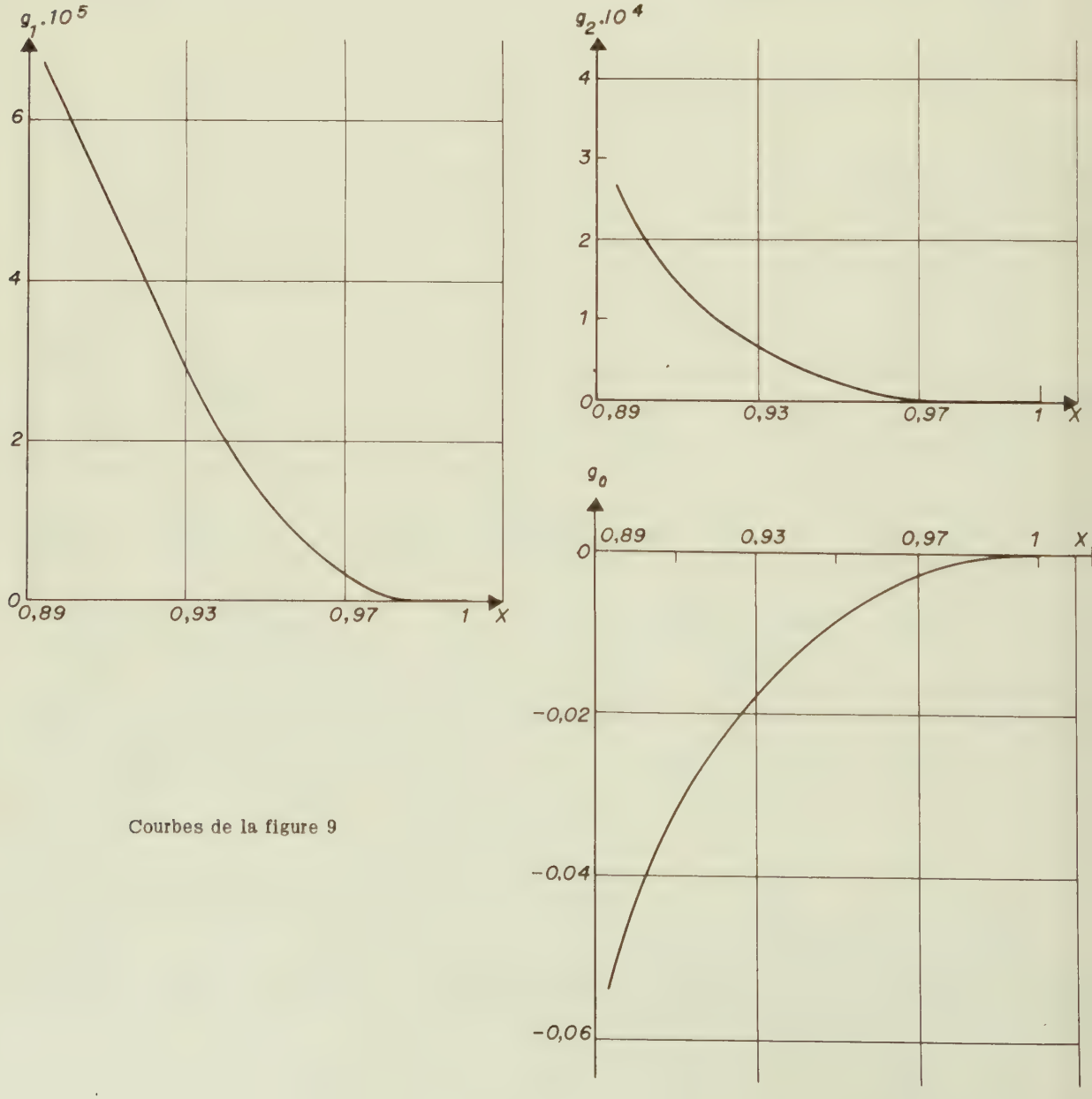
$$\xi_{i_1}^{\circ} = m_i \, A(x)$$

$$\xi_{i_1}^{1} = \left[\frac{1}{4} m_i \, B(x) + n_i \, A(x) \right] x^2 \, (5 \, x^2 - 4)$$

(IV.13)
$$\psi_1^{\circ} = \frac{\rho_\infty \, U_\infty \, R_c^{\,2}}{36} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\rho_i \, (0, \xi_o)}{\rho_o} \, [m_i \, g_o \, (x) + 2 \, n_i \, g_1 \, (x)]$$

$$- \, R_c^{\,4} \sum_{i=1}^{N_1} \mathcal{G}_i \, (0, \xi_o) \, m_i \, g_2 \, (x)$$

Les fonctions $g_o\,(x)$, $g_1(x)$, $g_2\,(x)$ sont représentées sur la figure 9. L'on remarque sur ces courbes que les fonctions $g_1(x)$, $g_2\,(x)$ prennent des valeurs très petites par rapport à la fonction $g_o(x)$. Les termes correspondants sont, le plus souvent, négligeables.



Courbes de la figure 9

Comme c'était à prévoir, les expressions pour les degrés d'avancement ont des singularités au point d'arrêt de l'écoulement figé ($x = 2/\sqrt{5}$), elles sont donc inapplicables au voisinage de ce point. Il n'en est pas de même de l'expression de la fonction de courant, qui est une somme de fonctions continues. L'équation

(IV.14) $$\psi_0^\circ + \psi_1^\circ = 0$$

peut ainsi servir pour déterminer, à l'approximation considérée, la distance de détachement du choc, dont la modification est donc $0(\varepsilon^\alpha)$.

Nous arrivons ainsi à la conclusion que les paramètres de l'écoulement au voisinage du point d'arrêt ne peuvent pas être représentés par un développement en puissances de ε. L'étude de la zone d'arrêt doit se faire à l'aide du système d'équations (IV.9), dont la résolution est excessivement difficile.

Pour mettre en évidence les propriétés qualitatives du passage à l'équilibre au voisinage du point d'arrêt, un exemple très simple a été choisi, celui de la relaxation de vibration. La cinétique de la relaxation de vibration a l'avantage d'être décrite par une équation linéaire. En plus, l'énergie d'origine chimique mise en jeu étant petite, l'on peut, en première approximation, négliger l'influence de la relaxation chimique sur l'écoulement. Il s'agit donc simplement d'intégrer l'équation de la cinétique chimique avec une distribution connue des vitesses.

Nous utilisons pour la fonction de courant l'expression simplifiée de LIGHTHILL, qui est de la forme

$$\Psi_0 = \frac{\rho_\infty U_\infty}{2} r^2 \left(1 - \frac{R_c - r}{R_c - R}\right) g\left(\alpha, \frac{r}{R_c}\right) \sin^2\theta .$$

L'équation qui détermine le degré d'avancement de la réaction chimique devient

(IV.15)
$$-\alpha U_\infty \cos\theta\, g \left(1 - \frac{R_c - r}{R_c - R}\right)\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\alpha U_\infty}{2r}\frac{d}{dr}\left[g\, r^2 \left(1 - \frac{R_c - r}{R_c - R}\right)\right] \times \sin\theta \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = -\, l\,(\xi - \xi^*).$$

Les fonctions g, l, ξ^* varient peu dans la zone étudiée et cette variation n'affecte pas la propriété qualitative que nous voulons mettre en évidence; par la suite ces fonctions seront remplacées par des constantes. Au voisinage de l'axe de symétrie, la solution satisfaisant aux conditions aux limites de l'équation (IV.15) est de la forme

(IV.16)
$$\frac{\xi - \xi^*}{\xi_0 - \xi^*} = \left(1 - \frac{R_c - r}{R_c - R}\right)^{\frac{l\,(R_c - R)}{g\,\alpha U_\infty}} \times \times \left[1 - \frac{l \sin^2\theta}{2\, g\, \alpha U_\infty} r^2 \left(1 - \frac{R_c - r}{R_c - R}\right) \int_r^R \frac{dr}{r^2 \left(1 - \frac{R_c - r}{R_c - R}\right)} + \ldots\right]$$

Dans le cas où la réaction chimique est lente, une définition convenable du petit paramètre est la suivante

$$\varepsilon = \frac{l\,(R_c - R)}{g\,\alpha U_\infty} .$$

L'expression (IV.16) montre que, pour $\varepsilon \ll 1$, les points où le degré d'avancement s'écarte sensiblement de sa valeur amont sont confinés dans une couche limite chimique dont les dimensions radiales sont exponentiellement petites par rapport à ε.

Ce résultat est obtenu pour le cas simple de la relaxation de vibration ; il semble plausible qu'on puisse l'étendre à des situations plus générales, mais cela est difficile à démontrer. Une étude de la zone d'arrêt, basée sur une certaine technique d'approximation, a été faite dans le travail [49]. Les résultats numériques obtenus montrent bien une diminution rapide de l'épaisseur de la couche limite chimique quand le paramètre ε décroît, mais il est impossible de juger du comportement asymptotique, pour $\varepsilon \to 0$, de cette épaisseur.

Chapitre V

ÉTUDE DE LA TRANSITION ENTRE LA ZONE DE RÉACTIONS RAPIDES ET LA ZONE DE RÉACTIONS LENTES

V.1. - CONDITIONS GÉNÉRALES.

Un écoulement hypersonique ne se compose que rarement d'une zone unique de l'un des deux types examinés dans les chapitres précédents. Le plus souvent, pour chaque réaction chimique, une zone de quasi-équilibre existe simultanément avec une zone de composition presque figée, les deux zones étant séparées par des couches de transition. L'aspect d'un tel écoulement est représenté sur la figure 10.

Une des conclusions les plus importantes auxquelles conduisent les solutions numériques obtenues consiste dans le fait que les zones de transition sont très souvent de faible épaisseur. Déjà les premiers calculs des tuyères, en tenant compte de la dissociation, ont montré que la région amont de la tuyère, où le gaz se trouve dans un état de quasi-équilibre chimique est suivie de très près par une autre zone où le degré de dissociation reste pratiquement invariable. L'utilisation de modèles de cinétique chimique plus élaborée ne modifie pas ce résultat, que l'on retrouve, avec moins de netteté, dans les écoulements autour des obstacles.

L'épaisseur relativement faible des zones de transition suggère une méthode de calcul des écoulements par "figeage brusque". Avec cette méthode, l'évolution

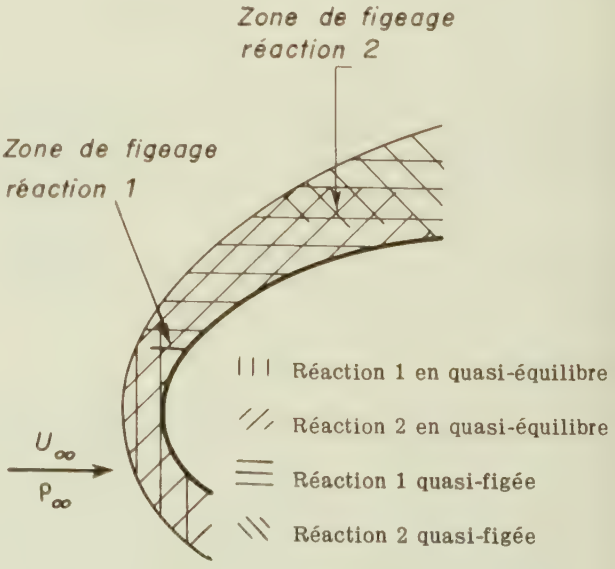


Fig. 10

réelle d'un degré d'avancement est remplacé par une évolution fictive, composée de deux parties. Dans la première partie, le degré d'avancement prend des valeurs qui correspondent à un état d'équilibre partiel : avec les notations du chapitre I

$$\xi_j = \varphi_{j_1}(\rho, s, \xi_i) = \xi^*_{j_1} \qquad i \neq j$$

Dans la seconde partie, le degré d'avancement reste constant. Un "critère de figeage" consiste en une indication permettant de localiser un point sur la ligne de courant où la valeur fictive du degré d'avancement correspondant à l'équilibre partiel est voisine de la valeur constante que prend ce degré d'avancement assez loin en aval. Naturellement, la méthode du figeage brusque ne donne pas une description détaillée de la variation des degrés d'avancement, mais souvent cette variation ne présente pas d'intérêt. Les deux défauts majeurs de la méthode sont les suivants :

- le figeage des réactions chimiques est accompagné d'une production d'entropie, parfois importante, qu'il est difficile d'évaluer.
- la composition chimique en aval est obtenue avec une précision incertaine.

L'on trouve dans la littérature un nombre assez grand de critères de figeage. Ces critères sont applicables à des situations diverses, mais leur contenu physique est toujours le même. Une définition explicite ou implicite de l'écart à l'équilibre est généralement proposée, et l'on affirme ensuite que le figeage se produit dès que cet écart a atteint une certaine valeur.

Pour toute réaction chimique, l'on est conduit à un critère de figeage en observant que l'équation de la cinétique prend toujours l'aspect suivant

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \xi_i = - Q(\rho, s, \xi)(\xi_i - \varphi_{i_1}).$$

Dans la zone de quasi-équilibre, le degré d'avancement est donné par un développement de la forme

$$\xi_i - \varphi_{i_1} = -\frac{1}{Q_o} \mathbf{v}_o \cdot \nabla \xi_{i_o} + \dots$$

les quantités d'indice zéro étant calculées dans l'hypothèse de l'équilibre partiel. Le développement ci-dessus doit cesser d'être valable dès que la valeur obtenue pour $\xi_i - \varphi_{i_o}$ devient importante, de l'ordre de l'unité par exemple. L'on obtient donc, comme critère de figeage

$$-\frac{1}{Q_o} \mathbf{v}_o \cdot \nabla \xi_{i_o} = C \, \xi_{s_o} \tag{V.1}$$

où C est une constante de l'ordre de l'unité.

Dans le cas où le nombre de réactions chimiques est important, il devient nécessaire d'utiliser des critères "globaux" qui tiennent compte de l'effet cumulatif des diverses réactions chimiques [54]. L'on arrive également à un critère "global" en utilisant la "distance à l'équilibre" définie au chapitre II. Ce critère est

$$\frac{\mathscr{D}^2}{s} = C \tag{V.2}$$

où, de nouveau, C est une constante, de l'ordre de l'unité.

La possibilité de calculer un écoulement par la méthode du figeage brusque est due à la sensibilité des vitesses de réaction aux valeurs qui prennent les paramètres hermodynamiques du gaz. L'applicabilité d'un certain critère est finalement déterminée par l'expérience

accumulée à la suite des calculs numériques. Il est d'autant plus intéressant d'effectuer une comparaison avec certains résultats exacts obtenus par BLYTHE [32] pour des situations idéalisées d'écoulement avec relaxation de vibration ou avec dissociation, où l'énergie chimique est insignifiante. Nous indiquons brièvement la méthode et les résultats de cet auteur pour mettre en évidence leurs relations avec ceux que nous exposons au paragraphe suivant. L'écoulement est divisé en zones: une zone d'entrée, une zone amont (de quasi-équilibre), une zone de transition, une zone aval (presque figée, appelée par BLYTHE zone asymptotique). Dans chaque zone, l'écoulement est décrit avec des variables spécifiques, les constantes d'intégration se déterminent par raccordement. Les formules obtenues dépendent du type de cinétique chimique utilisé.

Vibration - La valeur asymptotique du degré d'excitation a la forme suivante

$$\frac{\xi(x)}{\xi(1)} = \left[\frac{2\pi}{-G'(1)}\right]^{-\frac{1}{2}} \left(N^{\frac{1}{2}} + 0(N^{-\frac{1}{2}})\right) \exp\left\{-N \int_1^x G(y)\, dy\right\} \qquad x \gg 1$$

La variable x est proportionnelle à l'inverse de la température, le point de figeage est situé en $x = 1$, sa position est déterminée par un des critères mentionnés auparavant, G est une fonction proportionnelle à la vitesse de réaction et

$$N^{-1} = \left(\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx}\right)_{o\, x=1}$$

Dissociation - L'expression asymptotique du degré de dissociation est

$$\frac{\xi(x)}{\xi(1)} = \left[\frac{1}{2}N \int_1^x G(y)\, dy + 0{,}4045 + 0(N^{-1})\right]^{-1}.$$

La constante N prend, dans des situations courantes, des valeurs très grandes. Les conclusions auxquelles conduisent les formules ci-dessus sur la possibilité de calculer les écoulements par la méthode du figeage brusque sont ainsi négatives. En effet, la valeur prise par le degré d'avancement, loin en aval, n'est pas du même ordre que la valeur au point du figeage.

Dans le cas de la relaxation de vibration, ceci paraît bien refléter certains résultats numériques qui montrent un passage très lent vers la composition asymptotique. Il n'en est pas de même dans le cas des réactions ternaires, pour ce type de réaction, l'écart entre $\xi(\infty)$ et $\xi(1)$ est généralement peu important, même si le paramètre N est grand. L'on est obligé d'admettre que souvent certains facteurs sont présents, dont l'analyse de BLYTHE ne tient pas compte et qui sont responsables du figeage chimique.

V.2. - ÉTUDE DU FIGEAGE CHIMIQUE RAPIDE DE L'ÉCOULEMENT DANS UNE TUYÈRE.

Une étude du figeage chimique doit évidemment partir de l'hypothèse selon laquelle l'écoulement réel est voisin de celui obtenu par la méthode du figeage brusque. Les résultats que l'on pourrait espérer obtenir ainsi seraient les suivants :

- éviter, ou au moins simplifier l'intégration des équations de cinétique chimique ;
- déterminer les paramètres de l'écoulement en aval de la zone de transition sous la forme d'un développement asymptotique.

Nous admettons que les zones de figeage pour les différentes réactions chimiques ne sont pas superposées, il suffit alors de considérer que le gaz est le siège d'une seule réaction. Soit $\{M_i(x)\}$ la solution des équations du mouvement ; nous notons par $\{M_{i_o}(x)\}$ la solution obtenue

par la méthode du figeage brusque. L'hypothèse de base que nous adoptons s'exprime par l'inégalité suivante

$$|M_i(x) - M_{i_0}(x)| \ll M_{i_0}(x). \tag{V.3}$$

La réalisation de cette hypothèse doit être reliée à certaines propriétés que possèdent les fonctions figurant dans les équations du mouvement; nous déterminons d'abord ces propriétés. Ensuite, ayant mis en évidence le petit paramètre du problème, l'on pourra définir une méthode de calcul de l'écoulement par développements asymptotiques.

L'écoulement dans une tuyère d'un gaz qui est le siège d'une seule réaction chimique peut être décrit par un système de deux équations de la forme suivante

$$\frac{dP}{dx} = \Pi\,(P, \xi, x) \tag{V.4}$$

$$\frac{d\xi}{dx} = -K'(P, \xi, x)\,[\xi - \xi^*(P, x)] \tag{V.5'}$$

où P est la quantité $p + \rho v^2$ et ξ le degré d'avancement de la réaction chimique, normé de manière à avoir $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. L'abscisse x est rendue adimensionnelle à l'aide d'une longueur caractéristique de la tuyère. La fonction ξ^* a le sens d'un degré d'avancement correspondant à l'équilibre local; pour un gaz qui n'est pas en équilibre chimique, une quantité de ce type n'est pas définie de manière univoque mais dépend du choix des variables thermodynamiques indépendantes. La simplicité relative des calculs qui suivent est due, comme on le verra, au choix de ξ^* fait dans l'équation (V.5'). Cette équation peut encore s'écrire

$$\frac{du}{dx} = -\left[\frac{d\xi^*}{dx} + K(u, P, x)\,u\right] \tag{V.5}$$

où

$$u = \xi - \xi^*$$

La fonction K ne prend que des valeurs positives. Les propriétés suivantes sont une conséquence du fait que l'écoulement est accéléré

$$\frac{dK}{dx} < 0 \qquad \frac{d\xi^*}{dx} < 0. \tag{V.6}$$

Pour fixer les idées, nous supposons que le gaz part du repos, en $x = -\infty$, où il se trouve en équilibre chimique. La zone initiale de la tuyère, où $K \gg 1$, est une zone de quasi-équilibre, on a dans cette zone

$$\xi - \xi^* \ll \xi^*$$

et aussi

$$\frac{d(\xi - \xi^*)}{dx} \ll \frac{d\xi^*}{dx} \tag{V.7}$$

A l'exception de la zone du col, le degré d'avancement peut être représenté par un développement de la forme suivante

$$\xi = \xi^* + \frac{1}{K}\frac{d\xi^*}{dx} + 0\left(\frac{1}{K^2}\right) \tag{V.8}$$

Une forme équivalente de l'inégalité (V.7) est ainsi

(V.9)
$$\frac{\dfrac{d^2\xi^*}{dx}}{\dfrac{d\xi^*}{dx}} \ll K\left(1+\frac{1}{K^2}\frac{dK}{dx}\right).$$

Soit donc $\xi = \xi_0(x)$ la fonction qui représente la variation du degré d'avancement obtenue par la méthode du figeage brusque. Le point de figeage est un point anguleux pour le graphe de cette fonction, on a en effet

$$\left(\frac{d\xi_0}{dx}\right)_{x=x_f-0} = \left(\frac{d\xi_0^*}{dx}\right)_{x=x_f-0} \left(\frac{d\xi_0}{dx}\right)_{x=x_f+0} = 0$$

x_f étant l'abscisse du point de figeage. La courbe qui représente la variation effective du degré d'avancement (fig. 11) est par hypothèse voisine de la courbe qui représente la variation de ξ_0 ; la première de ces deux courbes possède donc, dans la zone de figeage, des courbures importantes qui passent par un maximum. Nous aurions voulu définir le point de figeage comme étant le point où la courbe qui représente la fonction $\xi = \xi(x)$ possède la plus grande courbure ; mais cette définition a le désavantage de ne pas être invariante aux transformations affines des variables ξ, x. Evidemment, la dérivée seconde de la fonction $\xi = \xi(x)$ possède également un maximum prononcé à l'intérieur de la zone de figeage. Nous introduisons une longueur caractéristique Λ par la relation

(V.10)
$$\frac{d^2\xi}{dx^2} \equiv \Lambda^{-1}(x) = \left(\frac{dK}{dx} + K^2\right) u + K\,\frac{d\xi^*}{dx}.$$

La position du point de figeage est définie par la racine de l'équation

(V.11)
$$\frac{d\Lambda}{dx} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^3\xi}{dx^3} = 0.$$

L'indice f servira à désigner les valeurs des paramètres au point où l'équation ci-dessus est vérifiée.

L'hypothèse de base que nous avons adoptée, conduit à l'inégalité

$$u_f = \xi_f - \xi_f^* \ll 1.$$

La quantité $d\xi/dx$ étant de l'ordre de l'unité, l'on déduit

(V.12)
$$K_f \gg 1.$$

La longueur caractéristique Λ_f donne une mesure de l'épaisseur de la zone de transition, en ce sens que l'écoulement devient figé à des distances du point de figeage qui sont grandes par rapport à Λ_f

$$\frac{d\xi}{dx} \to 0 \qquad \text{pour} \qquad x - x_f \gg \Lambda_f.$$

Cette relation ne peut être qu'une conséquence du fait que l'on a

(V.13) $$K \to 0 \qquad \text{pour} \qquad x - x_f \gg \Lambda_f$$

Les valeurs prises par la fonction K, qui sont grandes dans la zone de presque-équilibre, deviennent petites à l'intérieur de la zone de figeage. On est ainsi amené à supposer qu'à l'intérieur de cette dernière zone la variation effective de K est de la forme

(V.14) $$K = K_f \, k\left(\frac{x - x_f}{\Lambda_f^{\alpha}}\right)$$

où α est un nombre positif.

Le fait que le processus de figeage est rapide s'exprime par l'inégalité

(V.15) $$\Lambda_f \ll 1 .$$

Ainsi, le problème possède deux petits paramètres, Λ_f et K_f^{-1}; nous faisons l'hypothèse assez naturelle, qu'entre ces deux paramètres il existe une relation de la forme

(V.16) $$\Lambda_f = 0\,(K_f^{-\beta})$$

où β est un nombre positif. La relation (V.10) devient

(V.17) $$0\,(K_f^{\beta}) = 0\,(K_f^{\alpha\beta}) + 0\,(K_f).$$

Les valeurs admissibles des paramètres α et β sont les suivantes

(V.18) $$\alpha \leqslant 1 \qquad \beta = 1$$
$$\alpha = 1 \qquad \beta \geqslant 1 .$$

Toutes les combinaisons apparaissent a priori comme étant possibles et il est assez difficile de faire un choix ayant une validité générale. Nous nous laissons guider en nous appuyant sur le fait que les trois termes qui figurent dans l'équation (V.5) sont du même ordre de grandeur à l'intérieur de la zone de transition, en adoptant les valeurs

(V.19) $$\alpha = 1 \qquad \beta = 1 .$$

Ce choix conduit, comme on le verra, à une méthode cohérente, mais il n'exprime pas, pour autant, l'unique possibilité.

Nous pouvons maintenant formuler d'une manière précise le problème envisagé: trouver une représentation des inconnues sous forme de séries asymptotiques de puissances du paramètre $\frac{1}{K_f}$. Le problème que nous résolvons effectivement est beaucoup plus restreint ; les deux inconnues sont déterminées sous la forme

$$P = P_0 + \frac{1}{K_f} P_1 + 0\left(\frac{1}{K_f^2}\right) \qquad \xi = \xi_0 + \frac{1}{K_f} \xi_1 + 0\left(\frac{1}{K_f^2}\right)$$

Le choix de P comme deuxième fonction inconnue est essentiel pour le succès de l'application de la méthode des développements asymptotiques. Avec les variables usuelles ρ et T par exemple, la quantité ξ_0^* correspondante possède un point anguleux pour $x = x_f$ et la simplification obtenue par la méthode des développements asymptotiques est insignifiante.

La configuration des courbes représentées sur la figure 11 suggère une division de l'écoulement en quatre zones, d'après le schéma suivant

ZONE	FONCTIONS INCONNUES	VARIABLES
1. amont $x_f - x \ll K_f^{-1}$	P_-, u_-	x
2. transition amont $x_f - x \sim K_f^{-1}$	$\hat{P}_-$, $\hat{u}_-$	$\hat{x} = K_f (x - x_f)$
3. transition aval $x - x_f \sim K_f^{-1}$	$\hat{P}_+$, $\hat{\xi}_+$	$\hat{x} = K_f (x - x_f)$
4. aval $x - x_f \gg K_f^{-1}$	P_+, ξ_+	x

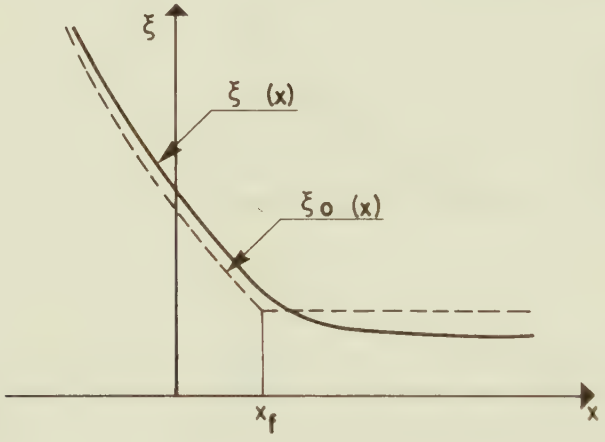


Fig. 11

Les quantités pourvues de l'indice zéro correspondent à un écoulement avec figeage brusque ; elles sont solutions du système d'équations suivant

$$\frac{dP_o}{dx} = \Pi (P_o , \xi_o , x)$$

(V.21)
$$\xi_o = \xi^* [P_o (x) , x] \qquad x \leqslant x_f$$
$$\xi_o = \xi^* [P_o (x_f) , x_f] \qquad x \geqslant x_f .$$

Nous admettons que la solution de ce système est connue. Elle dépend, pour une tuyère et un gaz déterminés, de plusieurs constantes

$$H \ , \ Q \ , \ P(-\infty) \ , \ x_f$$

où H est l'enthalpie totale et Q le débit de masse. L'abscisse du point de figeage est, pour l'instant, inconnue.

1. - Zone amont :

Pour obtenir les équations qui déterminent les quantités P_-, u_- l'on effectue les développements suivants

$$\Pi(P, \xi, x) = \Pi[P, \xi^*(P, x), x] + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}\right)_{\xi = \xi^*(P, x)} \frac{u_1}{K_f} + 0\left(\frac{1}{K_f^2}\right)$$

$$\Pi^*(P, x) = \Pi_0 + \left(\frac{\partial \Pi^*}{\partial P}\right)_0 \frac{P_1}{K_f} + 0\left(\frac{1}{K_f^2}\right)$$

où la notation

$$\Pi^*(P, x) = \Pi[P, \xi^*(P, x), x]$$

a été utilisée.

Les équations recherchées prennent la forme ci-dessous :

$$\frac{dP_{-1}}{dx} = \left(\frac{\partial \Pi^*}{\partial P}\right)_0 P_{-1} + \left[\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}\right)_{\xi = \xi^*(P, x)}\right]_{u_{-1}}$$

(V.22)

$$k_0 u_{-1} = -\frac{d\xi_0(x)}{dx}$$

avec les conditions aux limites

$$P_{-1}(-\infty) = 0 \qquad u_{-1}(-\infty) = 0.$$

La deuxième de ces conditions est automatiquement satisfaite. Le système (V.22) n'est pas valable au voisinage du col de la tuyère, il est donc nécessaire d'admettre que la zone de figeage se situe soit bien en amont soit bien en aval du col.

La solution des équations (V.22) est immédiate, elle s'écrit

$$u_{-1}(x) = -\frac{1}{k_0} \frac{d\xi_0(x)}{dx}$$

(V.23)

$$P_{-1}(x) = -\int_{-\infty}^{x} \exp\left[\int_{x'}^{x} \left(\frac{\partial \Pi^*}{\partial P}\right)_0 dx''\right] \frac{1}{k_0} \frac{d\xi_0(x')}{dx'} dx'$$

2. - *Zone de transition amont.*

Dans cette zone, les inconnues sont fonctions de l'abscisse "intérieure" $\hat{x}$. L'on pose

$$\hat{P}_- = \hat{P}_{-0}(\hat{x}) + \frac{1}{K_f}\hat{P}_{-1}(\hat{x}) + 0\left(\frac{1}{K_f^2}\right)$$

$$\hat{u}_- = \frac{1}{K_f}\hat{u}_{-1}(\hat{x}) + 0\left(\frac{1}{K_f^2}\right).$$

Les équations pour la quantité P sont les suivantes

$$\text{(V.24)} \qquad \begin{aligned} \frac{d\hat{P}_{-0}}{dx} &= 0 \\ \frac{d\hat{P}_{-1}}{d\hat{x}} &= \Pi^*(P_{-0},\, x_f) \end{aligned}$$

Après raccordement avec la solution amont, l'on obtient

$$\text{(V.25)} \qquad \begin{aligned} \hat{P}_{-0} &= P_0(x_f) \\ \hat{P}_{-1} &= P_{-1}(x_f) + \Pi^*[P_0(x_f),\, x_f]\,\hat{x}. \end{aligned}$$

Ces expressions simples sont une conséquence du fait que la variation de la quantité P n'ayant pas, à l'ordre zéro, un point anguleux pour $x = x_f$, le développement extérieur de cette quantité est également valable dans la zone de figeage. La situation n'est pas la même pour le degré d'avancement, qui est déterminé par l'équation

$$\text{(V.26)} \qquad \frac{d\hat{u}_{-1}}{d\hat{x}} + \hat{k}_{-0}\,\hat{u}_{-1} = -\left(\frac{d\xi^*}{dx}\right)_{-0}$$

Les formules (V.25) montrent que le second membre de cette équation est une constante

$$\text{(V.27)} \qquad -\left(\frac{d\xi^*}{dx}\right)_{-0} = -\left(\frac{d\xi_0}{dx}\right)_{x=x_f-0}$$

Certaines précautions sont nécessaires pour la détermination de la fonction $\hat{k}_{-0}$; cette fonction doit être évaluée avec les expressions (V.25) pour $\hat{P}_-$ et avec $\hat{u}_- = \hat{u}_{-1}$. Mais $\hat{k}_{-0}$ dépend aussi directement de l'abscisse, par l'intermédiaire de la fonction $A(x)$ qui représente la variation de la section transversale de la tuyère ; pour cette fonction il est suffisant de poser

$$\text{(V.28)} \qquad \hat{A}_-(x) = A(x_f) + \frac{1}{K_f}\left(\frac{dA}{dx}\right)_{x=x_f}\hat{x}.$$

Ainsi, la relation (V.26) est une équation non linéaire qui contient une seule fonction inconnue $\hat{u}_-$. Pour effectuer le raccordement avec la solution amont, nous écrivons la solution formelle de l'équation (V.26) sous la forme

$$\text{(V.29)} \qquad \hat{u}_{-1} = -\left(\frac{d\xi_0}{dx}\right)_{x=x_f-0} \exp\left(\int_{\hat{x}}^{0} \hat{k}_{-0}\,d\hat{x}'\right) \cdot \left[C - \int_{\hat{x}}^{0} \exp\left(-\int_{\hat{x}'}^{0} \hat{k}_{-0}\,d\hat{x}''\right) d\hat{x}'\right]$$

Le raccordement doit s'effectuer dans la zone

$$1 \ll \hat{x} \ll K_f$$

où l'on a $\hat{k}_{-0} \gg 1$, la variation de $\hat{u}_{-1}$ devant alors être de la forme

$$\hat{u}_{-1} = -\left(\frac{d\xi_0}{dx}\right)_{x=x_f-0} \frac{1}{\hat{k}_{-0}} + 0\left(\frac{1}{\hat{k}_{-0}^2}\right)$$

La formule (V.29) fournit une variation de ce type seulement si l'on pose

$$C = \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\int_{\hat{x}'}^{0} \hat{k}_{-0}\, d\hat{x}''\right) d\hat{x}'. \tag{V.30}$$

Cette relation exprime la condition de raccordement sous forme implicite. La constante C détermine l'écart par rapport à l'équilibre au point de figeage ; on a en effet

$$\hat{u}_{-1}(0) = (\xi_f - \xi_f^*)\, K_f = -C\left(\frac{d\xi_0}{dx}\right)_{x=x_f-0} \tag{V.31}$$

3. - Zone de transition aval.

Comme auparavant, la quantité P est déterminée par son développement extérieur, on a donc pour celle-ci des formules de la forme (V.25), tandis que la fonction $A(x)$ est remplacée par l'expression (V.28). La variation du degré d'avancement est décrite par l'équation

$$\frac{d\hat{\xi}_{+1}}{d\hat{x}} = -\hat{k}_{+0}\left[\hat{\xi}_{+1} - \left(\frac{d\xi^*}{dx}\right)_{0_f} \hat{x} - \xi_{1_f}^*\right] \tag{V.33}$$

où l'on a noté

$$\hat{\xi}^*(\hat{x}) = \xi^*(x_f) + \frac{1}{K_f}\left(\frac{d\xi^*}{dx}\right)_{0_f} \hat{x} + 0\left(\frac{1}{K_f^2}\right)$$

Dans le second membre de (V.33), le degré d'avancement est remplacé par l'expression ci-dessous

$$\hat{\xi}_+ = \xi_0(x_f) + \frac{1}{K_f}\hat{\xi}_{+1}(\hat{x}).$$

La relation (V.33) devient ainsi une équation non linéaire pour l'inconnue $\hat{\xi}_{+1}(x)$. La condition à la limite pour cette équation est fournie par le raccordement avec la solution obtenue pour la zone de transition amont

$$\hat{\xi}_+(0) = \hat{u}_-(0) + \hat{\xi}_-^*(0). \tag{V.34}$$

Le développement obtenu n'est cohérent que si l'on a $\xi_{+1} = 0(1)$ pour $1 \ll x \ll K_f$, il est donc nécessaire que la fonction $\hat{k}$ soit une fonction assez rapidement décroissante de $\hat{x}$.

4. Zone aval.

Cette zone est caractérisée par une des relations

$$k = 0\left(\frac{1}{K_f^2}\right) \qquad\qquad k = o\left(\frac{1}{K_f}\right)$$

L'on pose

$$\Pi_f = \Pi_o + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial P}\right)_o \frac{P_{+1}}{K_f} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}\right)_o \frac{\xi_{+1}}{K_f} + 0\left(\frac{1}{K_f^2}\right)$$

et les équations du mouvement conduisent au système suivant qui détermine les corrections

$$\frac{dP_{+1}}{dx} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial P}\right)_o P_{+1} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}\right)_o \xi_{+1}$$

(V.35)

$$\frac{d\xi_{+1}}{dx} = -K_f^2 \; k_{+o} \; (\xi_{o_f} - \xi_o^*)$$

De nouveau, les conditions à la limite s'obtiennent par raccordement

$$P_{+1}(x_f) = P_{-1}(x_f)$$

(V.36)

$$\xi_{+1}(x_f) = \hat{\xi}_{+1}(\infty)$$

où $\hat{\xi}_{+1}(\infty)$ est déterminé par l'équation (V.33). Les équations (V.35) s'intègrent sans aucune difficulté, et fournissent, entre autre, la valeur asymptotique du degré d'avancement.

La méthode de résolution présentée apparaît comme étant cohérente dans le cadre des hypothèses utilisées. Cette méthode possède l'avantage de ramener l'intégration du système initial, composé de deux équations non linéaires à celle d'une seule équation, non linéaire également, pour le degré d'avancement de la réaction. La détermination de la solution comporte une suite d'étapes dont la plus difficile consiste justement en l'intégration de l'équation pour le degré d'avancement, dans les deux zones de transition. Cette étape étant franchie, l'on dispose de trois relations (V.11, V.25, V.31) qui permettent de déterminer les trois principales constantes inconnues du problème : x_f, $P_{-1}(x_f)$, $\hat{u}_{-1}(0)$.

Les calculs sont considérablement simplifiés dans les cas où l'effet des réactions chimiques sur l'écoulement est négligeable. Les fonctions k, ξ^* sont alors des fonctions connues et la constante C se détermine en fonction de x_f, par une simple intégration. La résolution de l'équation (V.26) n'est donc pas nécessaire, la quantité $\hat{u}_{-1}(0)$ étant déterminée par la relation (V.31). L'équation (V.11), algébrique, ne contient donc finalement qu'une seule inconnue χ_f.

Il est intéressant de comparer les formules obtenues dans ce paragraphe avec les conclusions alors très différentes auxquelles conduit la méthode de BLYTHE. Les raisons du désaccord deviennent évidentes après un examen des expressions pour les valeurs asymptotiques des degrés d'avancement obtenues par cet auteur. Ces expressions sont présentées sous la forme d'un développement en puissances du petit paramètre $1/N$ mais l'on vérifie facilement que le petit paramètre effectif du développement n'est pas $1/N$ mais $G'(1)/N$. Les calculs de BLYTHE permettent donc d'affirmer que le figeage chimique rapide ne se produit pas dans un écoulement faiblement perturbé par les effets chimiques et avec $G'(1)/N \ll 1$. Comme le montre la relation (V.14), une des conditions du figeage rapide s'exprime par l'inégalité

$$G'(1) \gg 1.$$

Les résultats de BLYTHE permettent de mieux préciser cette condition, en l'écrivant

$$G'(1) = 0(N) \qquad \text{ou} \qquad G'(1) \gg N.$$

Apparemment, ces relations se réalisent souvent dans les tuyères hypersoniques.

En résumé, l'on peut dire que la méthode de BLYTHE s'applique à des tuyères de faible conicité ($G'(1) \ll N$), tandis que le figeage chimique rapide ne peut se produire que dans des tuyères de conicité importante ($G'(1) \sim N$).

CONCLUSION

La division en chapitres de ce travail suit la classification des réactions chimiques en rapides, normales et lentes. Le cas des réactions rapides apparaît comme étant le plus intéressant du point de vue mathématique, les équations du mouvement étant alors à perturbations singulières. En utilisant une représentation convenable de la "distance à l'équilibre", nous avons démontré que les équations des écoulements avec réactions chimiques offrent l'exemple d'un système stable. Sur la base de travaux existants, il est alors possible d'affirmer que dans un écoulement quasi-unidimensionnel, les inconnues du problème peuvent être représentées sous la forme de séries asymptotiques de puissances du petit paramètre ε. Le domaine de validité de ces séries n'inclue, toutefois, pas les zones de relaxation chimique situées en aval des surfaces qui portent les conditions aux limites.

Nous avons admis, sans démonstration, que cette possibilité persiste pour les écoulements avec un nombre de variables d'espace supérieur à l'unité. En représentant donc les paramètres de l'écoulement sous la forme

$$\overline{M} = \overline{M}_0 + \varepsilon^{\beta} \overline{M}_1 + \ldots$$

nous avons démontré que les termes $M_0 + \varepsilon^{\beta} \overline{M}_1$ peuvent être calculés en utilisant un système d'équations du mouvement où les équations de la cinétique sont absentes et l'effet des réactions chimiques est représenté par un coefficient de viscosité de volume. Les conditions aux limites pour ce système d'équations, s'obtiennent par une étude qui s'effectue en raccordant des développements asymptotiques intérieurs et extérieurs. Pour un écoulement qui est proche d'un courant homogène, une simplification analogue est possible, avec des réactions chimiques dont la vitesse est arbitraire, mais la viscosité de volume a le caractère d'un opérateur linéaire dont la forme a été précisée.

Nous avons appliqué cette expression de l'opérateur de viscosité de volume à l'étude des ondes de choc complètement dispersées. La méthode conduit, pour la description de ce type d'ondes, à une équation intégro-différentielle unique, qui peut être ramenée à un système normal d'équations différentielles non-linéaires. On a, parfois, tenté de décrire la structure de la zone de relaxation d'un choc, en utilisant un coefficient de viscosité de volume scalaire [70] ; les résultats obtenus sont médiocres, justement à cause du caractère d'opérateur de cette quantité.

Des deux problèmes auxquels le schéma "fluide avec viscosité de volume, conditions aux limites modifiées" a été appliqué, ce n'est que l'écoulement dans une tuyère qui conduit à des résultats généraux simples. L'étude de l'écoulement autour d'un corps émoussé présente plus de difficultés et nous avons traité ce problème dans une approximation qui est équivalente à celle utilisée par LIGHTHILL. Cette approximation possède l'avantage de conduire à des résultats explicites, tout en représentant convenablement la situation au voisinage du point d'arrêt.

Le problème de l'écoulement avec réactions lentes se présente sous un aspect mathématique relativement simple. Nous montrons en effet, sur un exemple, que la couche limite chimique qui, dans ce cas, entoure le corps, est d'une épaisseur exponentiellement petite. En construisant la solution du problème sous la forme d'un développement asymptotique de puissances de ε, la présence de la couche limite chimique peut donc être négligée. De nouveau, la solution effective d'un problème d'écoulement autour d'un corps émoussé de révolution, est obtenue dans une approximation qui correspond à celle utilisée par LIGHTHILL.

Le problème général de la transition entre les zones de l'écoulement ou les réactions chimiques sont rapides et les zones où les réactions sont lentes, ne nous apparait pas susceptible d'un traitement autre que numérique. En pratique, toutefois, les zones de transition sont très souvent d'une épaisseur relativement faible et nous proposons une méthode permettant d'étudier en ce cas un écoulement dans une tuyère. Nous mettons d'abord en évidence le petit paramètre du problème, qui est proportionnel à l'inverse de la dérivée seconde de la fonction $\xi(x)$ au point de figeage. On est conduit à une représentation de la solution sous la forme de développements asymptotiques valables dans les quatre zones dans lesquelles l'écoulement est divisé. Le problème, qui consistait initialement dans l'intégration d'un système de deux équations différentielles non-linéaires du premier ordre, est ramené à celui de l'intégration d'une seule équation.

Même dans le cadre restreint des aspects abordés dans cette étude, plusieurs problèmes ne sont pas résolus. En particulier, il serait souhaitable de développer une théorie de la transition chimique dans les écoulements autour des obstacles.

BIBLIOGRAPHIE SUR LES ÉCOULEMENTS AVEC RÉACTIONS CHIMIQUES

OUVRAGES ET ARTICLES DE SYNTHÈSE

[1] BRAY, K.N.C. – *Chemical reactions in supersonic nozzle flow.* 9th Symposium on combustion (1962).

[2] CARRIÈRE, P. – *Méthodes théoriques d'étude des écoulements supersoniques.* Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, n. 339a (1964).

[3] CHENG, H.K. – AIAA Journal, v. 1, n. 2 (1963).

[4] CLARKE, J.F., Mc. CHESNEY, M. – *The dynamics of real gases.* London, Butterworth (1964).

[5] HOLT, M. – *Les effets chimiques dans l'écoulement d'un gaz à grande vitesse.* Cours fait à l'Université de Paris (1964).

[6] LI, Y.T. – ARS Journal, v. 31, n. 2 (1961).

[7] LIGHTHILL, M.J. – J. Fl. Mech., v. 2, p. 1 (1957).

[8] PENNER, S.S. – *Chemical reactions in flow systems.* Butterworth Sc. Pub., London 1955.

[9] ROY, M. – *Aérothermodynamique fondamentale et notions de thermochimie.* ONERA, publication n. 84 (1956).

[10] VINCENTI, W.G. et KRUGER, C.H. – *Introduction to physical gas dynamics.* John Wiley and Sons, New York 1965.

[11] WOOD, W.W., KIRKWOOD, J.G. – J. Appl. Phys., v. 28, n. 4 (1957).

CINÉTIQUE CHIMIQUE

[12] ARIS, R. – Arch. Rat. Mec. Anal., v. 19, n. 2 (1965).

[13] BRAY, K.N.C. – Univ. Southampton, Dep. Aero. Astro. Rep. n. 260 (1964). *Coupling between atomic recombination and vibrational relaxation in expanding gas flows.*

[14] MARRONE, P.V., TREANOR, CH.E. – Ph. Fl., v. 6, n. 9 (1963). *On étudie le couplage vibration-dissociation pour l'écoulement en aval d'un choc.*

[15] MIKHAILOV, V.V. – INZ. Z., v. 28, p. 36-43 (1960).
INZ. Z., v. 31, p. 206-216 (1961). *On donne une représentation analytique des fonctions thermodynamiques de l'air dissocié.*

[16] MILLICAN, R.C., WHITE, D.C. – J. Chem. Phys., v. 39, n. 12 (1963). *Exposé des résultats sur la cinétique de la relaxation de vibration.*

[17] TREANOR, C.E. – AIAA paper, 65-29 (1965). *Coupling of vibration and dissociation in gas dynamic flows.*

[18] WRAY, K.L. – *Chemical kinetics of high temperature air – Hypersonic Flow Research,* Riddell ed., Academic Press, 1962.

ÉCOULEMENTS LINÉARISÉS

[19] BLOOM, M.H. SFORZA, P.M. – J. Fl. Tech., v. 8, n. 1 (1965). *On étudie un écoulement non en équilibre avec diffusion des espèces.*

[20] BLYTHE, P.A. – ARC, CP. 724 (1964). *Prandtl-Meyer flow of a relaxing gas.*

[21] CLARKE, J.F. – J. Fl. Mech., v. 7, p. 4 (1960). *On déduit les équations linéarisées pour un écoulement avec relaxation. Application à la plaque plane.*

[22] CLARKE, J.F. – J. Fl. Mech., v. 20, p. 2 (1964). *On étudie les écoulements non stationnaires avec sources de chaleur. La solution est obtenue par la méthode des fonctions de GREEN.*

[23] CLARKE, J.F., CLEAVER, J.W. – C.A. Report Aero n.163(1964). *Greens functions and non-equilibrium equations with application to non-equilibrium free streams.* [*L'équation de VINCENTI est utilisée. Application à des problèmes d'écoulement sub et supersoniques, et avec des courants amont non en équilibre.*

[24] MOORE, F.K., GIBSON, W.E. – J AS, v. 27, n. 2 (1960). *L'équation des ondes est obtenue, dans le cas d'une seule réaction chimique. Application à l'écoulement autour d'un profil mince et d'une paroi ondulée.*

[25] NAPOLITANO, I.G. – AIAA Journal, v. 1, n. 1 (1963). *On donne une démonstration de l'équivalence entre les effets chimiques et les effets d'une viscosité de volume pour un écoulement linéarisé avec réactions rapides.*

[26] NAPOLITANO, L.G. – Univ. Naples, I.A. Rep. 103 (1963). *Generalized velocity potential equation for pluri-reacting mixtures.*

[27] RYHMING, I.L. – J. Fl. Mech., v. 17, p. 4 (1963). *On étudie l'écoulement linéarisé à l'intérieur d'un cylindre ondulé.*

[28] VINCENTI,W.G.- J. Fl. Mech., v. 6, p. 4 (1959). *On déduit l'équation du potentiel pour un écoulement linéarisé. Application à l'écoulement auprès d'une paroi ondulée.*

[29] VINCENTI, W.G. – J. Mécanique, v. 7 (1960). *On traite le problème du dièdre.*

[29 a] WANG, K.C. – Ph. Fl., v. 7, n. 1 (1964). *On étudie l'écoulement non stationnaire autour d'un corps mince.*

ÉCOULEMENTS QUASI-UNIDIMENSIONNELS

[30] BARRÈRE, M. – *Influence des réactions chimiques sur l'écoulement.* Dans Supersonic flow, chemical processes and radiative transfer. O.B. Olfe et V. Zakkay ed., Pergamon Press (1964).

[31] BLOOM, M.H., LU TING – AEDC - TN - 60 - 156 (1960). *On near equilibrium and near frozen behavior of one-dimensional flow. On étudie, dans les deux cas limites, l'écoulement en aval d'une section où la composition chimique est celle de l'équilibre.*

[32] BLYTHE, P.A. – J. Fl. Mech., v. 20, p. 2 (1964). *On étudie la relaxation de vibration, quand l'influence de la chimie sur l'écoulement est faible. La solution est obtenue par développement en puissances de $1/\theta v$.*

[33] BRAINERD, J.A., LEVINSKI, E.S. – AIAA J., v. 1, n. 11 (1963). *Etude des effets spatiaux et de ceux de la couche limite. Calculs numériques avec la cinétique de WRAY.*

[34] BRAY, K.N. – J. Fl. Mech., v. 6, p. 1 (1959). *Etude numérique de l'écoulement d'un gaz de LIGHTHILL dans une tuyère en hyperboloïde de révolution. Un critère de figeage est proposé.*

[35] CLARK, F.L., JOHNSON, C.B. – NASA TN D-2019 (1963). *Real gas hypersonic nozzle flow parameters for N in thermodynamic equilibrium.*

[36] EMANUEL, G. – AEDC - TDR - 63 - 82 (1963). *Problems underlying the numerical integration of the chemical and vibrational rate equations in a near-equilibrium flow.* [*L'équation étudiée est* $\frac{de}{dx} = \frac{e - e_i}{u\tau_i} \quad \tau_i \ll 1$].

[37] EMANUEL, G., VINCENTI, W.G. – AIAA J., v. 1, n. 2 (1963). *On propose une méthode d'intégration numérique des équations du mouvement d'un mélange arbitraire.*

[38] ERICSON, W.D. – NASA TN D-1816 (1963). *Vibrational non equilibrium flow of nitrogen in hypersonic nozzles.*

[39] ESCHENROEDER, A.Q. et al. – Phys. Fl., v. 5, n. 5 (1962). *On donne des résultats de calculs numériques concernant l'expansion de l'air.*

[40] PHINNEY, R. – AIAA J., v. 1, n. 2 (1963). *On propose un critère de figeage pour la relaxation de vibration.*

[41] STOLLERY, J.L., PARK, C. – Imp. Coll. Sc. Tech. Rep. Aeron. Dep. n. 115 (1963). *Computor solutions to the problem of vibrational relaxation in hypersonic nozzle flows.*

CÔNES. DIÈDRES. ÉCOULEMENT DE PRANDTL-MEYER

[42] APPLETON, J.P. – Ph. Fl., v. 6, n. 8 (1963). *On donne des résultats numériques pour une expansion de PRANDTL-MEYER d'un gaz dissocié.*

[43] ARKHIPOV, V.N., KOROSKO, K.S. – P.M.T. Ph., n. 6 (1962). *On étudie l'écoulement autour d'un cône.*

[44] CAPIAUX, R., WASHINGTON, M. – AIAA J., v. 1, n. 3 (1963). *On étudie l'écoulement autour d'un dièdre. Les variables utilisées sont (ψ, y) où ψ est la fonction de courant.*

[45] LEE, R.S. – *A study of non equilibrium flow over a wedge.* SUDAER, n. 160 (1963). *La solution est obtenue par un développement autour de la solution figée. Résultats numériques pour vibration et dissociation.*

[46] SEDNEY, R., GERBER, N. – AAIA J., v. 1, n. 11 (1963). *Etude d'un écoulement, avec relaxation de vibration autour d'un cône, par la méthode des caractéristiques.*

[47] STULOV, V.N. – Izvestia, OTN, n. 3 (1963). *Etude de l'écoulement autour d'un dièdre par un développement du type presque figé au voisinage de l'arête.*

OBSTACLES DE FORME GÉNÉRALE

[48] BLYTHE, P.A. – Aeron. Quart., v. XIV, n. 4 (1963). *On étudie l'effet de la relaxation de vibration sur un écoulement newtonien autour d'un corps émoussé.*

[49] CONTI, R.J. – AIAA J., v. 2, n. 11 (1964). *On étudie l'écoulement au voisinage du point d'arrêt avec une méthode d'approximation.*

[50] CHU, B.T. – WADC - TN - 57-213 (1957). *Wave propagation and the method of characteristics in reacting gas mixtures with application to hypersonic flow.*

[51] FREEMAN, N.C. – J. Fl. Mech., v. 4, n. 4 (1958). *La cinétique du gaz de LIGHTHILL est définie. On étudie la relaxation en aval d'un choc droit et l'écoulement newtonien autour d'un obstacle émoussé.*

[52] HALL, J.G. et al. – AFOSR 2072 (1962). *Inviscid hypersonic airflows with coupled nonequilibrium processes.*

[53] INOUYE, M. – AIAA J., v. 3, n. 1 (1965). *On donne des valeurs de la distance de détachement du choc pour l'écoulement autour d'une sphère.*

[54] LENARD, M. – *Gas dynamics of chemically reacting gas mixtures near equilibrium – Dynamics of Manned lifting planetary entry,* ed. S.M. SCALA et al (1963).
On étudie l'écoulement avec réactions rapides par une méthode de développements asymptotiques.

[55] LICK, W. – J. Fl. Mech., v. 7, p. 1 (1960). *On étudie l'écoulement autour d'un corps émoussé dans l'approximation newtonienne.*

[56] SHIH, W.L.C. et al. – MIT-DSR-9126. Tech. Rep. 66 (1963). *Nonequilibrium blunt body flows using the method of integral relations.*

[57] SWIGART, R.J. – AIAA J., v. 1, n. 11 (1963). *On étudie l'écoulement autour d'un corps émoussé à l'aide d'une méthode de troncature des équations.*

[58] VAGLIO-LAURIN, R. et BLOOM, M.H. – *Chemical effects in external hypersonic flows – Hypersonic flow research,* Riddell ed., Academic Press (1962).

[59] WOOD, A.D. et al. – RAD-TM-63-88 (AVCO) (1963). *Determination of the effects of chemical and vibrational relaxation on an inviscid hypersonic flow field.*

SIMILITUDE

[60] BLOTTNER, F.G. – AIAA J., v. 1, n. 9 (1963). *On donne des solutions pour les équations de la couche limite.*

[61] ESCHENROEDER, A.G. – Prog. Defender TR 64 026 (1964). *Nonequilibrium scaling of high enthalpy gas flows.*

[62] GIBSON, W.E. – ARS Journal, v. 32, n. 2 (1962). *On donne des lois de similitude pour un écoulement avec dissociation.*

[63] GIBSON, W.E., MARRONE, P.V. – Ph. Fl., v. 5, n. 12 (1962). *On définit une correspondance entre l'écoulement en aval d'un choc droit et l'écoulement autour d'un corps émoussé.*

STRUCTURE DES CHOCS

[64] CLARKE, J.F., RODGERS, J.B. – J. Fl. Mech., v. 21, p. 4 (1965). *On étudie les propriétés de la structure des chocs dans un gaz non-visqueux dont les molécules possèdent des degrés de liberté internes.*

[65] FRIEDRICHS, K.O. – Naval Report, 79-4 J (1946). *On the mathematical theory of deflagration and detonation.* [*Dans ce travail, on présente une étude qualitative complète des équations d'un écoulement unidimensionnel avec réactions exothermiques*].

[66] GIBSON, W.E., BUCKMASTER, J.D. – AIAA J., v. 2, n. 10 (1964). *On discute l'importance de l'effet de la diffusion et de celui de la conduction de chaleur sur l'écoulement en aval d'un choc fort.*

[67] INGER, G.R., MEIS, D.A. – AIAA J., v. 1, n. 8 (1963). *On donne des polaires de choc pour un gaz dissocié.*

[68] MARRONE, P.V. – CAL-QM-1626-A-12 (I) (1963). *Inviscid nonequilibrium flow behind bow and normal shock waves P.I. General analysis and numerical examples.*

[69] TALBOT, L. – ARS J., v. 32, p. 1009 (1962). *Cet article est une revue du problème de la structure des chocs.*

[70] TALBOT, L., SCALA, S.M. – Dans Rarefied Gas Dynamics, Talbot, L. ed., Academic Press (1963). *Shock wave structure in a relaxing diatomic gas. On étudie l'effet de la relaxation de rotation.*

BIBLIOGRAPHIE COMPLÉMENTAIRE

[71] CABANNES, H. – *Contribution à l'étude théorique des fluides compressibles.* Thèse, éd. Gauthier-Villars (1952).

[72] CHAPMAN, S., COWLING, T. – *The mathematical theory of non-uniform gases.* Cambridge Univ. Press (1962).

[73] GERMAIN, P. – *Contribution à l'étude des ondes de choc en magnétodynamique des fluides.* O.N.E.R.A. publ. n. 97 (1959).

[74] GERMAIN, P. et GUIRAUD, J.P. – *Conditions de choc et structure des ondes de choc dans un écoulement stationnaire de fluide dissipatif.* O.N.E.R.A. publ. n. 105 (1962).

[75] HIRSCHFELDER, J.O., CURTISS, C.F., BIRD, R.B. – *Molecular theory of gases and liquids.* John Wiley and Sons, New York (1954).

[76] LANDAU, L. et LIFSCHITZ, E. – *Mécanique des milieux continus.* Pergamon Press (1960).

[77] VASSILIEVA, A.B. – Doklady Akademii Nauk, v. 124, n. 3 (1959)
" " " v. 142, n. 4 (1962)
Matem. Sbornik, v. 50, n. 1 (1960).

[78] WASOW, W. – Ach. Rat. Mech. Anal., v. 14, n. 1 (1963).

[79] WHITHAM, G.B. – Comm. Pure Appl. Math., v. XII, n. 1 (1959).

*****

Certaines parties de ce travail ont été résumées dans les notes suivantes :

[80] *La viscosité de volume des gaz à réactions chimiques rapides.* C. R. Ac. Sc. Paris, t. 257 (1963), p. 4133-4134.

[81] *Ecoulement à réactions chimiques rapides dans les tuyères.* Rech. Aér., n. 100 (1964) et Pyrodynamics, v. 2 (1965), p. 263-273.

[82] *Ecoulement supersonique avec réactions chimiques rapides autour d'un corps à nez émoussé.* C. R. Ac. Sc. Paris, t. 260 (1965), p. 1077-1080.

Achevé d'imprimer à l'O.N.E.R.A., janvier 1967. Dépôt légal 1er trimestre 1967 - n°271.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

STABILITÉ GRAVITATIONNELLE D'UNE MASSE FLUIDE
EN ROTATION DIFFÉRENTIELLE

Vu et approuvé :

Paris, le 13 décembre 1965.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE